Kant

als

Mathematiker.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

Philosophischen Facultät

der Universität Erlangen.

Eingereicht von

Elias Fink.

Frankfurt a. M.

Buchdruckerei von M. Slobotzky.

1889.

Meinen lieben Eltern

als

Zeichen der Dankbarkeit

gewidmet.

Kant als Mathematiker.

Motto: Dreierlei bleibt, wenn man den Ruhm, den Kant seiner Nation, den Nutzen, den er dem spekulativen Denken verliehen hat, bestimmen will, unverkennbar gewiß: Einiges, was er zertrümmert hat, wird sich nie wieder erheben; Einiges, was er begründet hat, wird nie wieder untergehen, und was das Wichtigste ist, so hat er eine Reform gestiftet, wie die gesamte Geschichte der Philosophie wenig ähnliche aufweist."

Wilh. v. Humboldt.

Die von Gauß, Riemann und Helmholtz angeregten Zweifel an der Wahrheit der geometrischen Axiome und die Grundsätze der neuen Theorie polydimensionaler Räume haben in den letzten Jahren die Mathematiker zu einem eingehenderen Studium der Werke Kant's veranlaßt, weil unter allen Philosophen er am meisten sein Augenmerk auf die Begründung der reinen Mathematik gerichtet hat. Die transcendentale Idealität und gleichzeitige objektive Realität von Raum und Zeit waren nach den Darstellungen der Kritik der reinen Vernunft auch bei Nicht-Kantianern so widerspruchslos anerkannt, daß die ihnen entstandenen Gegner eine Auseinandersetzung mit deren Urheber nicht abweisen konnten. So kam es, daß der Name Kant's Eingang gefunden hat in viele Abhandlungen, die der Untersuchung der Wahrheit der mathematischen Begriffe gewidmet sind, und dieser Umstand schuf wiederum seinerseits mehrere Monographien, welche Kant's Gedanken über einige wichtige Fragen aus dem Gebiete der Mathematik darlegen und kritisieren. So z. B. hat sein Zahlenbegriff eine eingehende Betrachtung erfahren von Dr. C. Th. Michaelis in der wissenschaftlichen Beilage zum Programm der Berliner Charlottenschule von Ostern 1884. Sein Unendlichkeitsbegriff ist mit dem des Aristoteles verglichen worden von

Dr. J. Theodor in dessen Inaugural-Dissertion: Der Unendlichkeitsbegriff bei Kant u. Aristoteles. Breslau 1876. Allein diese und andere Gelegenheitsschriften haben dabei fast ausschließlich die Kritik der reinen Vernunft berücksichtigt, was insofern berechtigt sein mag, als diese Kritik die Grundgedanken der Kant'schen Philosophie in nuce enthält. Wir werden aber sehen, daß unser Philosoph in beinahe allen seinen Schriften den Mathematiker erkennen läßt, selbst in solchen, die von scheinbar ganz heterogener Materie handeln, wie etwa in folgender: „Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral 1763", „Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes 1763". „Träume eines Geistersehers 1766", „Religion innerhalb der Grenzen der blossen Vernunft 1792." Es schien daher an der Zeit, zur leichteren Orientierung über Kant als einen Mathematiker eine zusammenhängende Darstellung zu geben von seinen Ansichten über mathematische Dinge, so wie sich dieselben in seinen sämtlichen Schriften (Nach der Ausgabe von Schubert und Rosenkranz, Leipzig 1839) zerstreut vorfinden. Eine solche Zusammenstellung gewährt nicht nur ein zutreffendes Bild von ihm als Mathematiker, sondern läßt gleichzeitig erkennen, wie er über gewisse Fragen aus diesem Gebiete seine vorkritischen Meinungen den Grundlehren der Kritik der reinen Vernunft allmählich angepaßt hat. Aus dem Gesagten ergiebt sich, daß die Aufschrift zu unserer Abhandlung völlig mißverstanden würde, wenn man in dem Folgenden eine Darstellung von schöpferischen Leistungen Kant's auf mathematischem Gebiete erwartete. Dergleichen hat unser Philosoph so gut wie gar nicht hervorgebracht, obwohl er sich vielfach mit rein mathematischen Studien, besonders in den ersten Semestern seines Universitätsbesuches, beschäftigt und eine Zeit lang als Privatdozent über Mathematik gelesen hat. Trotzdem scheint er mit vollem Rechte den Namen Mathematiker zu verdienen, denn er hat für diese Wissenschaft ein Geschäft übernommen, über welches ihre eigenen Pfleger meist ganz hinweggegangen sind, nämlich ihr eigentümliches Wesen genau zu erforschen und diejenigen Merkmale festzustellen, durch welche sie sich von verwandten

Wissenschaften und besonders von Philosophie unterscheidet. Denn so wie vor ihm bedeutende Philosophen in den Fehler verfallen waren, Philosophie nach mathematischer Methode zu behandeln, so haben alte und moderne Mathematiker das Entgegengesetzte unternommen, nämlich Mathematik mit philosophischem Auge zu betrachten; auf beiden Seiten ein Irrtum, der vermieden worden wäre, wenn man den spezifischen Unterschied dieser beiden Erkenntnisarten richtig erfaßt hätte. Aber selbst wenn Kant dies eben besprochene Verdienst für die Mathematik nicht hätte, so wäre es doch der Mühe wert zuzusehen, wie dieser gewaltige philosophische Geist, dem die Metaphysik jene nur den Entdeckungen eines Kopernikus vergleichbaren, einfachen und dabei so erhabenen Gedanken verdankt, sich in dem Felde der Mathematik bewegt hat.

Dies wird unsere Abhandlung darlegen in drei Hauptabschnitten, von denen der erste das enthält, was sich auf den generellen Unterschied zwischen philosophischer und mathematischer Erkenntnisweise bezieht; der folgende sucht zu ergründen, worauf im besonderen die Evidenz der letzteren beruhe; der letzte endlich beschäftigt sich mit denjenigen allgemeinen mathematischen Begriffen, deren genaue Fassung oft Schwierigkeiten bietet. Ein Ueberblick über das Ganze wird uns schließlich zeigen, wie weit Kant's Kenntnisse in der Mathematik reichten.

Wir nehmen deshalb unsern Ausgangspunkt von der fundamentalen Scheidung zwischen Philopsophie und Mathematik, weil daraus alles Weitere, was Kant über die Verschiedenheit der Methode in beiden Wissenschaften sowie über den Grund für die Evidenz der letzteren und einige diese besonders berührende Fragen nur um so verständlicher scheinen wird. Schon Pythagoras und Plato, so setzt Kant weitläufig auseinander (Von einem vornehmen Ton in der Philosophie 1796. I 623 f. f.) haben über Mathematik philosophiert. Das Wunder der Zahlen, d. h. die scheinbare Zweckmäßigkeit derselben zur Lösung mancher mathematischer Probleme, hat auf Pythagoras wie eine Art Magie gewirkt, die ihn veranlaßte, diesen geheimnisvollen Eigenschaften weiter nachzuspüren. So kam er von der Entdeckung des Zahlenverhältnisses der Töne und des Gesetzes, nach

welchem sie Musik ausmachen, auf den Gedanken, daß uns durch die Zahlen eine, wenn auch nur dunkle Anschauung des innersten Wesens der Natur gewährt sei. Denn nichts belebt den Sinn so sehr wie Musik; das belebende Prinzip im Menschen aber ist die Seele. Da diese zugleich ein freies, sich selbst bestimmendes Wesen ist, so stellte Pythagoras schließlich den Satz auf: animus est numerus se ipsum movens.

Was für diesen Griechen das Wunder der Zahlen war, wurde für Plato das Wunder der Gestalten, d. i. eine Art von Zweckmäßigkeit gewisser geometrischer Figuren zu einer Manigfaltigkeit der Auflösung von Problemen aus einem Prinzip, gleichsam als ob die Erfordernisse zur Konstruktion gewisser Größenbegriffe absichtlich in sie gelegt seien. Da wir nun mit unserem Verstande, einem Erkenntnisvermögen durch Begriffe, über diese selbst hinaus die Erkenntnis nicht ausdehnen können, so verlegte Plato den Ursprung der Begriffe in einen Verstand, der zugleich Urgrund aller Dinge ist, also in den göttlichen, aus welchem uns die ectypa oder Ideen als Urbilder der Begriffe im göttlichen Verstande zuteil geworden sind. Unsere Geburt verdunkelt durch Vergessenheit den Ursprung der Ideen, da der Geist, unsere Seele, nur gewaltsam in den Körper gestoßen worden, „von dessen Fesseln sich allmählich loszumachen nunmehr das edle Geschäft der Philosophie sein müsse."

Den eben skizzierten „Wundern" der Mathematik, dieser harmonischen Einheit bei tausendfältiger Manigfaltigkeit, stand unser Philosoph in seiner vorkritischen Periode mit ebenso naiver Verwunderung gegenüber wie Pythagoras und Plato. Was diesen beiden Philosophen an den Zahlen und den geometrischen Figuren so aufgefallen ist, waren die Augenscheinlichkeit in der Ueberzeugung, die Genauigkeit in der Ausführung und der weite Umfang der Anwendung, also eben jene Eigenschaften, welche in den Augen Unbefangener die mathematische von jeder anderen menschlichen Erkenntnis auszeichnen. Kant erzählt in dem „Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes 1763 (I 199), daß einer seiner Schüler, dem er den Satz vom

freien Fall in gleichen Zeiten durch die Sehnen eines Kreises, die an den Vertikaldurchmesser stoßen, erläuterte, „dadurch nicht weniger wie durch ein Naturwunder" gerührt wurde, und fährt dann fort: „Und in der That wird man durch eine so sonderbare Vereinigung vom Manigfaltigen nach so fruchtbaren Regeln in einer so schlecht und einfältig scheinenden Sache, als ein Zirkelkreis ist, überrascht und mit Recht in Bewunderung gesetzt. Es giebt Auflösungen der Geometrie, wo dasjenige, was nur durch weitläufige Veranstaltung scheint möglich zu sein, sich gleichsam ohne alle Kunst in der Sache selbst darlegt." Ferner (I 208) „In den Eigenschaften des Raumes liegen schöne Verhältnisse und in den unermeßlichen Manigfaltigkeiten seiner Bestimmungen eine bewunderungswürdige Einheit." Diese Phänomene erregen seine Aufmerksamkeit in hohem Grade, er denkt wohl nach über eine Erklärung für dieselben, allein er hat zunächst keine und weist nur eine leichte Ausflucht, wie sie Plato versucht hatte, zurück mit den Worten: „Was die Vereinbarung so vieler Folgen, die alle mit den Dingen und der Welt in so großer Harmonie stehen, untereinander anlangt, so würde es ungereimt sein, sie wiederum in einem Willen zu suchen."

Von der richtigen Erklärung dieser Wunder ist er noch weit entfernt, er begnügt sich vielmehr, wie Pythagoras, mit einer Art von Mystizismus, indem er fortfährt (I 240): „Wenn man fragen sollte, welches denn der Gebrauch sei, den man von der großen Einheit in den mancherlei Verhältnissen des Raumes, welche der Meßkünstler erforscht, machen könnte, so vermute ich, daß allgemeine Begriffe von der Einheit der mathematischen Objekte auch die Einheit und Vollkommenheit in der Natur könnten zu erkennen geben." Er bespricht im Anschlusse hieran die Eigenschaften des Kreises, bei kleinstem Umfang die größte Fläche einzuschließen, weist den Zusammenhang dieser Eigenschaft mit der der regulären Polygone nach und sagt schließlich (S. 250): „Es bietet sich hier sehr bald diese Bemerkung, daß das Gegenverhältnis des Größten und Kleinsten im Raum auf die Gleichheit ankomme. Und da die Natur sonsten viel Fälle einer notwendigen Gleichheit an die Hand giebt, so

können die Regeln, die man in den gedachten Fällen der Geometrie in Ansehung des allgemeinen Grundes solches Gegenverhältnisses des Größten und Kleinsten zieht, auch auf die notwendige Beobachtung des Gesetzes der Sparsamkeit in der Natur angewandt werden . . . . . Die Verhältnisse des Raumes sind so unendlich manigfaltig und verstatten gleichwohl eine so gewisse Erkenntnis und klare Anschauung, daß gleichwie sie schon öfter zu Symbolen der Erkenntnisse ganz anderer Art vortrefflich gedient haben, (z. E. die Erwartungen in den Glücksfällen auszudrücken) also auch Mittel an die Hand geben können, die Regeln der Vollkommenheit in natürlich notwendigen Wirkungsgesetzen in sofern sie auf Verhältnisse ankommen, aus den einfachsten und allgemeinen Gründen zu erkennen." Erst in nachkritischen Schriften finden sich einige Stellen, welche zeigen, daß unser Philosoph sich von dieser schwärmerischen Ueberschätzung der Mathematik gänzlich befreit hat. So sagt er in der Kritik der Urteilskraft 1790 (V S. 204) offenbar im Hinblick auf die oberflächliche Meinung des Pythagoras von dem Zahlenverhältnisse der Töne: „An den Reizen und der Gemütsbewegung, welche die Musik hervorbringt, hat die Mathematik sicherlich nicht den mindesten Anteil, sondern sie ist nur die unumgängliche Bedingung derjenigen Proportion der Eindrücke, in ihrer Verbindung sowohl als ihrem Wechsel, dadurch es möglich wird, sie zusammenzufassen und zu verhindern, daß diese einander nicht stören, sondern zu einer kontinuierlichen Bewegung und Belebung des Gemüts durch damit konsonierende Affekten und hiermit zu einem behaglichen Selbstgenusse zusammenstimmen." Auf der andern Seite steht er aber auch nicht an einzuräumen, daß man den geometrischen Dingen eine „Natur" beilegen müsse, wenn man berücksichtigt, daß z. B. der Kreis manche willkürliche Bestimmungen des Raumes in einer allgemeinen Regel vereinigt, daß beispielsweise bei zwei sich schneidenden Sehnen das Rechteck aus den Stücken der einen dem der anderen gleich ist; wenn man ferner bedenkt, wie unendlich viel verschiedene Lagen diese Linien annehmen können, und wahrnimmt, daß sie gleichwohl beständig unter dem nämlichen Gesetze stehen, von dem sie

nicht abweichen können.“ Und da legt sich denn Kant die naheliegende und doch so lange von Niemand aufgeworfene Frage vor: (Prolegomena 1783. III S. 86.) „Liegt dieses Gesetz im Zirkel oder liegt es im Verstande, d. h. enthält diese Figur, unabhängig vom Verstande, den Grund dieses Gesetzes in sich, oder legt der Verstand, indem er nach seinen Begriffen die Figur konstruiert hat, zugleich das Gesetz der einander in geometrischer Proportion schneidenden Sehnen in dieselbe hinein?“ Diese Fragestellung war der Angelpunkt des ganzen „Wunders“, und ihre Beantwortung mußte notwendig auf die richtige Spur zur Erklärung desselben führen. Später freilich modifiziert er den eben gebrauchten Begriff Natur geometrischer Figuren ein wenig, indem er in den Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft 1786 (V S. 305) es für falsch erklärt, den geometrischen Figuren eine Natur beizulegen; nur von einem Wesen derselben könne man sprechen, da in ihrem Begriffe nichts, was ihr Dasein ausdrückte, gedacht wird; Wesen aber „ist das erste innere Prinzip dessen, was zur Möglichkeit eines Dinges gehört.“ Darum ist auch bei metaphysischen Untersuchungen über das Wesen der Dinge die gewöhnliche Ausflucht der durch Kritik in die Enge getriebenen Freunde des gesunden Menschenverstandes hinfällig, nämlich ihre Behauptung, es müßten doch endlich einige Sätze sein, die unmittelbar gewiß sind. Als solche können sie aber nur mathematische anführen, wie 2×2=4, oder zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich. Allein diese Urteile sind von denen der Metaphysik wohl zu unterscheiden: (III S. 149) „Denn in der Mathematik kann ich alles durch mein Denken selbst machen (konstruieren), was ich mir durch einen Begriff als möglich vorstelle; ich thue zu einer 2 die andere nach und nach hinzu und mache selbst die Zahl 4 oder ziehe in Gedanken von einem Punkte zum andern allerlei Linien und kann nur eine einzige ziehen, die sich in allen ihren Teilen (gleichen oder ungleichen) ähnlich ist. Aber ich kann aus dem Begriffe eines Dinges durch meine ganze Denkkraft nicht den Begriff von etwas Anderem, dessen Dasein notwendig mit dem ersteren verknüpft ist, herausbringen, sondern muß die Erfahrung zu Rate ziehen.“

Den hier angedeuteten Gegensatz zwischen Metaphysik und Mathematik giebt Kant später in den Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft 1786 (V S. 308) kurz so an: „Reine Vernunfterkenntnis aus bloßen Begriffen heißt reine Philosophie oder Metaphysik, dagegen wird die, welche nur auf die Konstruktion der Begriffe, vermittelst der Darstellung des Gegenstandes in einer Anschauung a priori, ihre Erkenntnis gründet, Mathematik genannt." Philosophie und Mathematik sind beide Vernunfterkenntnisse, jene aus Begriffen, diese aus der Konstruktion der Begriffe, oder wie Kant dies im Hinblick auf seine Tafel der Kategorien näher ausführt: (Kritik d. r. V. 1781 (II S. 560) „Alles, was da ist zu erwägen, ob und wiefern es ein Quantum ist oder nicht, daß ein Dasein in demselben oder Mangel vorgestellt werden müsse, wiefern dieses etwas (welches Raum oder Zeit erfüllt) ein erstes Substratum, oder bloße Bestimmung sei, eine Beziehung seines Daseins auf etwas Anderes, als Ursache oder Wirkung, habe, und endlich isoliert oder in wechselseitiger Abhängigkeit mit andern in Ansehung des Daseins stehe, die Möglichkeit dieses Daseins, die Wirklichkeit und Notwendigkeit, oder die Gegenteile derselben zu erwägen: Dieses Alles gehört zur Vernunfterkenntnis aus Begriffen, welche philosophisch genannt wird. Aber im Raume eine Anschauung a priori zu bestimmen (Gestalt), die Zeit zu teilen (Dauer), oder bloß das Allgemeine der Synthesis von einem und demselben in der Zeit und dem Raum, und die daraus entspringende Größe einer Anschauung überhaupt (Zahl) zu erkennen, das ist ein Vernunftgeschäft durch Konstruktion der Begriffe und heißt mathematisch." Damit hat Kant eine feste Grundlage für die konsequente Scheidung dieser beiden so nahe verwandten Vernunfterkenntnisse gewonnen und ein unberechtigtes Uebergreifen aus dem einen in das andere Gebiet ist fortan für ihn ausgeschlossen. Die Begriffe und Grundsätze stehen unerschütterlich fest, da sie, obwohl a priori erzeugt, sich doch nur auf Data zur möglichen Erfahrung erstrecken sollen (II 199). „Diese Forderung erfüllt die Mathematik durch die Konstruktion der Gestalt, welche eine den Sinnen gegenwärtige, obzwar a priori zu-

stande gebrachte Erscheinung ist. Der Begriff der Größe sucht in eben der Wissenschaft seine Haltung und Sinn in der Zahl, diese aber an den Fingern, den Korallen des Rechenbretts, oder den Strichen und Punkten, die vor Augen gestellt werden. Der Begriff bleibt immer a priori erzeugt, samt den synthetischen Grundsätzen oder Formeln aus solchen Begriffen, aber der Gebrauch derselben und Beziehung auf angebliche Gegenstände kann am Ende doch nirgends als in der Erfahrung gesucht werden, deren Möglichkeit (der Form nach) jene a priori enthalten." So, bemerkt er im Hinblick auf das zwölfte Euklidische Axiom, hat z. B. der Begriff einer Figur, welche von zwei geraden Linien eingeschlossen ist, keinen Widerspruch in sich, denn die Begriffe von zwei geraden Linien und deren Zusammenstoß enthalten keine Verneinung der Figur. Die Unmöglichkeit beruht aber hier nicht auf dem Begriff an sich selbst, sondern auf der Konstruktion desselben im Raume, d. i. den Bedingungen des Raumes, und diese haben wiederum ihre objektive Realität und gehen auf mögliche Dinge, weil sie die Form der Erfahrung überhaupt a priori in sich enthalten.

Was übrigens den Begriff „Konstruktion" betrifft, so finden sich bei Kant mehrfache Bestimmungen desselben, es dürfte daher angezeigt sein, sie hier zusammenzustellen.

In der Schrift: „Ueber eine Entdeckung der Kritik d. r. V. 1790 (I S. 407) heißt es in einer Anmerkung: „In allgemeiner Bedeutung kann alle Darstellung eines Begriffes durch die (selbsttätige) Hervorbringung einer ihm korrespondierenden Anschauung Konstruktion heißen. Geschieht sie durch die bloße Einbildungskraft, einem Begriffe a priori gemäß, so heißt sie die reine (dergleichen der Mathematiker allen seinen Demonstrationen zu Grunde legen muß). Wird sie aber an irgend einer Materie ausgeübt, so würde sie die empirische Konstruktion heißen können." Aehnlich Kritik d. r. V. (II S. 550): „Einen Begriff aber konstruieren heißt, die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen. Zur Konstruktion eines Begriffes wird also eine nicht empirische Anschauung erfordert, die folglich als Anschauung ein einzelnes Objekt ist, aber nichts desto weniger als die Konstruktion eines Begriffs Allgemeingiltigkeit für alle mög-

lichen Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muß." Die einzelne hingezeichnete Figur ist empirisch, drückt aber dennoch den Begriff in seiner vollen Allgemeinheit aus, weil bei dieser empirischen Anschauung immer nur auf die Handlung der Konstruktion des Begriffs gesehen wird, und von den den Begriff nicht verändernden Verschiedenheiten abstrahiert wird. Ebenso definiert er in den Metaphysischen Anfangsgründen 1786 (V S. 309): „Nun heißt Etwas a priori erkennen, es aus seiner bloßen Möglichkeit erkennen, die Möglichkeit bestimmter Naturdinge kann aber nicht aus ihren bloßen Begriffen erkannt werden, denn aus diesen kann zwar die Möglichkeit des Gedankens, aber nicht des Objekts als Naturding erkannt werden. Also wird . . . . . . noch erfordert, daß die dem Begriffe korrespondierende Anschauung a priori gegeben werde, d. i. daß der Begriff konstruiert werde. Den Begriff einer zusammengesetzten Bewegung konstruieren, heißt eine Bewegung, sofern sie aus zwei oder mehreren gegebenen in einem Beweglichen vereinigt entspringt, a priori in der Anschauung darstellen." Endlich noch wird S. 339 die mechanische Konstruktion von der mathematischen dadurch geschieden, daß die letztere „nur anschaulich machen soll, was das Objekt (als Quantum) sei, nicht wie es durch Natur und Kunst hervorgebracht werden könne." Und nicht bloß Größen (quanta) konstruiert die Mathematik, wie in der Geometrie, sondern auch die Größe (quantitatem), wie in der Buchstabenrechnung, wobei sie von der Beschaffenheit des Gegenstandes, der nach einem solchen Größenbegriffe gedacht werden soll, gänzlich abstrahiert. Sie wählt sich alsdann eine gewisse Bezeichnung aller Konstruktion von Größen überhaupt (Zahlen, als der Addition, Subtraktion u. s. w. Ausziehung der Wurzel) und nachdem sie den allgemeinen Begriff der Größen nach den verschiedenen Verhältnissen derselben auch bezeichnet hat, so stellt sie alle Behandlung, die durch die Größe erzeugt und verändert wird, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar und gelangt vermittelst einer „symbolischen Konstruktion" eben so gut wie die Geometrie nach einer ostensiven oder geometrischen dahin, wohin die diskursive

Erkenntnis vermittelst bloßer Begriffe niemals gelangen könnte.“ (Kritik d. r. V. 1781. (II. 555.)

Die mathematische Erkenntnis hat also das Eigentümliche an sich, daß sie ihre Begriffe zuerst in der Anschauung und zwar a priori darstellen muß, weshalb ihre Urteile auch stets intuitiv sind, während Philosophie sich mit diskursiven Urteilen aus festen Begriffen begnügt und ihre apodiktischen Lehren durch Anschauung nur erläutern, aber nicht ableiten kann. Diese Erscheinung leitet sogleich auf die erste Bedingung der Möglichkeit der Mathematik, es muß ihr nämlich eine reine Anschauung zu Grunde liegen, in welcher sie alle ihre Begriffe in concreto darstellen oder, wie Kant es nennt, konstruieren kann. Ist ihr dies aber nicht möglich, so überschreitet sie ihre Grenzen und betritt das Gebiet der Philosophie, wenn sie mit Begriffen operiert, die einer Konstruktion nicht zugänglich sind. Man kann hiernach beurteilen, wie weit die Verfechter polydimensionaler Räume sich von Kant entfernen, da sie doch gestehen müssen, daß solche, wenn auch analytisch, doch nicht anschaulich dargestellt werden können. Innerhalb jener reinen Anschauung aber kann die reine Mathematik auch synthetische Sätze a priori aufstellen; denn wie die empirische Anschauung es möglich macht, daß wir unsern Begriff durch neue Prädikate, welche die Anschauung selbst darbietet, in der Erfahrung synthetisch erweitern, so wird es auch die reine Anschauung thun, nur mit dem Unterschiede, daß im letzteren Falle das synthetische Urteil gewiß und apodiktisch ist, im ersteren aber nur a posteriori und empirisch gewiß. Es bietet sich hier jedoch eine scheinbar unüberwindliche Schwierigkeit dar, nämlich daß Anschauung selbst wieder eine Vorstellung ist, so wie sie unmittelbar von der Gegenwart des Gegenstandes abhängt, es müßte demnach Anschauung des Gegenstandes dem Gegenstande selbst vorangehen, was doch ungereimt ist. Dieser Einwurf kann jedoch nur erhoben werden, so lange als wir in der oberflächlichen Meinung verharren, daß unsere Anschauung die Dinge so vorstelle, wie sie an sich sind. Dann würde freilich aus der Vorstellung von Raum noch gar nicht folgen, daß alles dieses sich in der Natur gerade so verhalte, denn man sieht

nicht ein, wie Dinge mit dem Bilde, das wir uns zum Voraus von ihnen machen, notwendig übereinstimmen müssen. Wenn aber dieses Bild die wesentliche Eigenschaft unserer Sinnlichkeit ist, durch die uns allein Gegenstände gegeben werden und zwar nur ihrer Erscheinung nach, nicht wie sie an sich sind, dann ist die Frage nach der Möglichkeit der Mathematik widerspruchsfrei beantwortet: denn Raum und Zeit, welche Gegenstände als Erscheinungen selbst erst möglich machen, sind die einzigen Anschauungen, die reine Mathematik allen ihren Urteilen zu Grunde legt: Geometrie fußt auf der reinen Anschauung des Raumes, Arithmetik bringt ihre Zahlenbegriffe mit Hilfe der Zeit zustande, nämlich durch succeſſive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit, und selbst reine Mechanik kann ihre Begriffe von Bewegung nur durch die Vorstellung der Zeit zuwege bringen. Beiläufig sei hier auf die Einteilung der Mathematik hingewiesen, die Kant an dieser Stelle giebt; hier rechnet er also die Mechanik noch zum Gebiete der Mathematik, während er in der Vorrede zu den Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft 1786 (V 317) sie der Naturwissenschaft beizählt. Es darf uns das nicht weiter wundern, wenn wir bedenken, daß Kant eine Deduktion für die Teile der Mathematik nie unternommen hat, so wie er etwa die Vierteilung der Naturwissenschaft in Phoronomie, Dynamik, Mechanik und Phänomenologie begründet.

Der „Scharfsinnigkeit" derjenigen, welche sich von dem hergebrachten Begriffe, als ob Raum und Zeit wirkliche Beschaffenheiten der Dinge seien, nicht losmachen können, legt Kant (Prolegomena 1783 (III. 41) ein Paradoxon zur Erklärung vor, das sie gewiß wird bekehren müssen. Zwei sphärische Triangel von beiden Hemisphären, die einen Bogen des Aequators zur gemeinschaftlichen Basis haben, können bezüglich der Seiten und Winkel völlig gleich sein, „sodaß an keinem, wenn er allein und vollständig beschrieben wird, nichts angetroffen wird, was nicht zugleich in der Beschreibung des andern läge, und doch kann einer nicht an Stelle des andern (nämlich auf der entgegengesetzten Hemisphäre) gesetzt werden." Dasselbe Paradoxon deckt er auch an Fällen aus dem gewöhnlichen Leben auf. „Was kann

wohl meiner Hand oder meinem Ohr ähnlicher oder in allen Stücken gleicher sein, als ihr Bild im Spiegel? Und dennoch kann ich eine solche Hand, als im Spiegel gesehen wird, nicht an die Stelle ihres Urbildes setzen; denn wenn dieses eine rechte Hand war, so ist jene im Spiegel eine linke. Nun sind hier keine inneren Unterschiede, die irgend ein Verstand nur denken könnte; und dennoch sind die Unterschiede innerlich, soweit die Sinne lehren, denn die linke Hand kann mit der rechten doch nicht zwischen denselben Grenzen eingeschlossen sein (sie können nicht kongruieren), der Handschuh der einen Hand kann nicht auf der anderen gebraucht werden." Wir stehen also hier vor einer unerklärlichen Antinomie, daß nämlich zwei Dinge in allen zur Größe und Qualität gehörigen Bestimmungen völlig einerlei sind, woraus doch mit Recht gefolgert wird, daß eines in allen Fällen und Beziehungen an die Stelle des andern kann gesetzt werden, und trotzdem ist dies unmöglich sowohl bei den erwähnten sphärischen Dreiecken, als auch bei den beiden Händen oder den beiden Ohren.

Schließlich weiß sich auch unser Philosoph hier nicht anders zu helfen, als mit dem Hinweis darauf, daß die Gegenstände nur Erscheinungen sind, deren Möglichkeit auf dem Verhältnisse gewisser an sich unbekannter Dinge zu unserer Sinnlichkeit beruht. Wir können daher den Unterschied ähnlicher und gleicher, aber doch inkongruenter Dinge (widersinnig gewundener Schnecken) durch keinen einzigen Begriff verständlich machen, sondern nur durch das Verhältnis der rechten und linken Hand, welches unmittelbar auf Anschauung geht.

Dies galt ihm als so feststehende Thatsache, daß er darin einen bestätigenden Beweisgrund erblickte für den Satz: daß der Raum nicht zu den Eigenschaften der Dinge an sich, sondern nur zur objektiven Form unserer sinnlichen Anschauung von den Dingen gehöre. (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft 1786 (V 325.)

Wenn übrigens Kant hinzufügt, daß die in Rede stehende Vertauschung oder Deckung mit ebenen Figuren stets möglich sei, so ist dies zum mindesten ungenau. Denn auch bei solchen ist im allgemeinen erst ein Umklappen erforder-

lich, wenn sie zur Deckung gebracht werden sollen. Beachtet man diese Thatsache, so dürfte sich vielleicht auch jene erwähnte Antinomie, welche sphärische Gebilde darbieten, auflösen lassen.

Die beiden Teildreiecke, in welche z. B. ein Parallelogramm durch eine Diagonale zerfällt, sind kongruent, und ihre Deckung läßt sich durch Verschieben in der Ebene anschaulich machen. Bei den beiden kongruenten Teilen, in welche ein gleichschenkeliges Dreieck durch die Senkrechte von der Spitze zur Basis zerlegt wird, ist dies aber nicht möglich, es sei denn, daß das Dreieck gleichzeitig rechtwinkelig ist. Sonst ist die Deckung nur durch Umklappen zu bewerkstelligen. Die in dieser Kongruenz verborgene Inkongruenz muß offenbar durch den Unterschied in der Lage bedingt sein, d. h. die Teile des gleichschenkeligen Dreiecks sind symmetrisch angeordnet in Bezug auf die Senkrechte als Symmetrieachse. Diese Symmetrie muß erst durch Umklappen beseitigt werden, wenn die Teile sich decken sollen, denn zwei sich deckende Flächen haben keine Symmetrieachse. Am Parallelogramm aber bildet die Diagonale keine Symmetrieachse und deshalb können die Teile durch bloße Verschiebung in der Ebene zur Deckung gebracht werden. Wir erkennen hieraus, daß die Forderung der Deckung kongruenter Figuren identisch ist mit der Forderung, ihre Symmetrie aufzuheben, so daß zu den positiven Bedingungen der Kongruenz eigentlich noch die Forderung unsymmetrischer Lage als negative hinzugefügt werden müsse. Dasselbe gilt nun auch für die beiden in der Größe übereinstimmenden sphärischen Dreiecke mit gemeinsamer Basis und für die beiden Hände; jene liegen symmetrisch zur Aequatorebene, diese in Bezug auf die Ebene, in welcher sie sich berühren, wenn sie mit ihren Innenflächen aneinander gelegt werden. Sollen daher die sphärischen Dreiecke sich decken, oder der Handschuh der linken Hand der rechten Hand passen, so muß die ihnen anhaftende Symmetrie aufgehoben werden. Dort wird dies erreicht, wenn man das eine Dreieck so eindrückt, daß seine bisherige konvexe Seite eine konkave wird, hier durch die Umstülpung.

Die besprochenen Antinomien des Raumes, an welchem

nach Kant's Meinung der gemeine Menschenverstand mit seiner vorgefaßten Ansicht über das Wesen des Raumes scheitern mußte, sind auch in neuerer Zeit wieder betont worden, aber freilich in ganz anderer Absicht als von unserem Philosophen. Man hat nämlich auf dieselben diejenigen verwiesen, welche gegen die Annahme einer vierten Dimension im Raume waren. Und als alle Analogieschlüsse vom zwei- und dreidimensionalen Raume auf einen vierdimensionalen nichts verfingen, da glaubte man die Skeptiker durch die Macht der Tatsache überzeugen zu müssen, indem man ihnen in Herrn Slade ein „vierdimensionales Wesen" vorstellte. Diesem soll'e angeblich das Kunststück gelungen sein, in einer wohlversiegelten Schnur ohne Ende einen Knoten zu schürzen, was doch nur unter Hinzuziehung der vierten Dimension des Raumes möglich war. Auch Kant hatte schon in seinem 23sten Lebensjahre an die Möglichkeit von mehr als drei Dimensionen im Raume gedacht, weil er für die nur dreifache Dimension keinen Grund finden konnte. In der Abhandlung „Von der Schätzung der lebendigen Kräfte" 1747 (V S. 25) sagt er nämlich: „Weil ich in dem Beweise, den Herr v. Leibnitz irgendwo in der Theodicee von der Anzahl der Linien hernimmt, die von einem Punkte winkelrecht gegen einander können gezogen werden, einen Zirkelschluß wahrnehme, so habe ich darauf gedacht, die dreifache Dimension der Ausdehnung aus demjenigen zu erweisen, was man bei den Potenzen die Zahlen wahrnimmt. Die drei ersten Potenzen derselben sind ganz einfach und lassen sich auf keine andere reduzieren, allein die vierte, als das Quadratoquadrat, ist nichts als eine Wiederholung der zweiten Potenz. So gut mir diese Eigenschaft der Zahlen schien, die dreifache Raumesabmessung daraus zu erklären, so hielt sie in der Anwendung doch nicht Stich. Denn die vierte Potenz ist in allem demjenigen, was wir uns durch die Einbildungskraft im Raume vorstellen können, ein Unding. Man kann in der Geometrie kein Quadrat mit sich selber, noch den Würfel mit seiner Wurzel multiplizieren." Es ist aber nicht recht zu verstehen, weshalb Kant nicht schon bei den drei ersten Potenzen auf die völlige Divergenz mit den Verhältnissen des Raumes geführt worden

ist. Kann man denn wohl Punkte mit Punkten oder Linien multiplizieren? „Daher,“ heißt es weiter, „beruht die Notwendigkeit der dreifachen Abmessung nicht sowohl darauf, daß, wenn man mehrere setzte, man nichts anderes thäte, als daß die vorigen wiederholt würden, (sowie es mit den Potenzen der Zahlen beschaffen ist), sondern vielmehr auf einer gewissen anderen Notwendigkeit, die ich noch nicht zu erklären im Stande bin.“ Diese Argumentation ist natürlich entsprechend dem jugendlichen Alter, in welchem sie entstanden ist, weit entfernt von der dialektischen Schärfe, die wir an dem nachkritischen Kant bewundern; um so mehr ist es zu bedauern, daß er auf die so interessante Frage nach der Polydimensionalität des Raumes später nicht näher eingegangen ist. In der genannten Schrift spricht er nur gewisse Vermutungen aus. So stellt er es als wahrscheinlich hin, daß die dreifache Abmessung des Raumes von dem Gesetze herrühre, nach welchem die Kräfte der Substanzen in einander wirken; und weil letzteres so geschieht, daß die Stärke der Wirkung sich wie das Quadrat der Weiten umgekehrt verhält, so muß auch das Ganze, das daher entspringt, die Eigenschaft der dreifachen Dimension haben. Er gesteht allerdings, daß das Gesetz der Wirkung nach dem doppelten umgekehrten Verhältnis selbst willkürlich ist, und daß Gott dafür ein anderes, zum Exempel des umgekehrten dreifachen Verhältnisses hätte wählen können, daß endlich aus einem anderen Gesetze auch eine Ausdehnung von anderen Eigenschaften und Abmessungen geflossen wäre. „Eine Wissenschaft von allen diesen Raumarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte.“ An eine solche Aufgabe hat er sich denn auch nicht herangewagt, was vielleicht den Schluß zuließe, daß er für dieselbe nicht genügend mathematisch vorgebildet war. Das mußte er den mathematischen Genies der Gauss, Lobatschewsky und Helmholtz überlassen. Er beruhigte sich mit dem Gedanken, daß die Unmöglichkeit, die wir bei uns bemerken, einen Raum von mehr als drei Abmessungen uns vorzustellen, wohl daher rühre, weil unsere Seele ebenfalls nach dem Gesetze des umgekehrten doppelten Verhältnisses der Weiten die Eindrücke von außen empfängt,

und weil ihre Natur selber dazu gemacht ist, nicht nur so zu leiden, sondern auch auf diese Weise außer sich zu wirken. Nur in den Prolegomenen 1783 (II S. 70) kommt er noch einmal auf die Frage nach der Anzahl der Dimensionen im Raume zurück und bemerkt dabei: „Daß der vollständige Raum (der selbst keine Grenze eines anderen Raumes mehr ist) drei Abmessungen habe, und Raum überhaupt auch nicht mehr derselben haben könne, wird auf den Satz gebaut, daß sich in einem Punkte nicht mehr als drei Linien rechtwinkelig schneiden können. Dieser Satz aber kann gar nicht aus Begriffen dargethan werden, sondern beruht unmittelbar auf Anschauung und zwar reiner a priori, weil er apodiktisch gewiß ist."

Man sieht also, Kant ist hier doch nicht über Leibnitz hinausgekommen, obwohl er diesen eines Zirkelschlusses beschuldigte. Und wenn Helmholtz den Raum definiert als das durch unsere Willensimpulse unmittelbar veränderliche Verhältnis der Dinge, so ist damit für die Dimensionenzahl desselben auch nichts erwiesen.

Um so besser ist es Kant gelungen, diejenigen Eigenschaften der Mathematik aufzudecken, denen sie ihre unantastbare Evidenz verdankt und durch welche sie sich der Philosophie gegenüber vorteilhaft auszeichnet. „Man gebe," sagt er in der Kritik d. r. V. (II 554) „einem Philosophen den Begriff eines Triangels und lasse ihn nach seiner Art ausfindig machen, wie sich wohl die Summe seiner Winkel zum rechten verhalten möge. Er hat nun nichts als den Begriff von einer Figur, die in drei geraden Linien eingeschlossen ist, und an ihr den Begriff von eben so viel Winkeln. Nun mag er diesem Begriffe nachdenken, solange er will, er wird nichts Neues herausbringen. Er kann den Begriff der geraden Linie, oder eines Winkels, oder der Zahl Drei zergliedern und deutlich machen, aber nicht auf andere Eigenschaften kommen, die in diesen Begriffen gar nicht liegen. Allein der Geometer nehme diese Frage vor. Er fängt sofort davon an, einen Triangel zu konstruieren. Weil er weiß, daß zwei rechte Winkel zusammen gerade so viel austragen, als alle berührende Winkel, die aus einem Punkte auf einer geraden Linie gezogen werden können, zu-

sammen, so verlängert er eine Seite seines Triangels und bekommt zwei berührende Winkel, die zwei rechten zusammen gleich sind. Nun teilt er den äußeren von diesen beiden Winkeln, indem er eine Linie mit der gegenüberstehenden Seite des Triangels parallel zieht, und sieht, daß hier ein äußerer Winkel entspringe, der einem innern gleich ist u. s. w." Mit Recht tadelt Michaelis in der zitierten Abhandlung über Kant's Zahlenbegriff die in diesem Beispiele sich kundgebende Verkennung des Zahlenbegriffs, indem er hervorhebt, daß die Zahl drei in dem Begriffe des Dreiecks nicht neben dem der geraden Linie als ein Merkmal derselben dastehe: „Drei gerade Linien" ist nicht „drei" und „gerade Linie", sondern die bestimmte Zusammenfassung und Einheit eines Objekts. Das angeführte Beispiel beweist aber doch recht deutlich den gewaltigen Unterschied zwischen dem diskursiven Vernunftgebrauch nach Begriffen und dem intuitiven durch Konstruktion der Begriffe. Allein was ist die Ursache zu diesem fundamentalen Unterschied zwischen beiden Vernunfterkenntnissen? Beziehen sie sich vielleicht auf heterogene Objekte, und kann man Philosophie von Mathematik etwa dadurch trennen, daß man sagt, jene habe nur Qualität, diese nur Quantität zum Objekt?

Diesen Versuch weist Kant zurück; denn einerseits handelt Philosophie ja auch von Größenbegriffen z. B. von der Totalität, von der Unendlichkeit und so weiter, andererseits beschäftigt sich die Mathematik aber auch mit Qualitäten z. B. mit dem Unterschiede der Linien und Flächen, als Räumen von verschiedener Qualität, oder mit der Kontinuität der Ausdehnung als einer Qualität derselben. Folglich kann der Unterschied dieser beiden Arten von Vernunfterkenntnis in nichts Anderem beruhen, als lediglich in der Form zu erkennen, aber keineswegs im Gegenstande selbst. In der philosophischen Betrachtung eines Gegenstandes halten wir uns bloß an allgemeinen Begriffen, die mathematische aber richtet mit diesen allein nichts aus, sondern eilt sogleich zur Anschauung. Die philosophische Erkenntnis betrachtet das Besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine im Besonderen, sogar im Einzelnen, aber doch a priori vermittelst der Vernunft, sodaß, wie

dieses Einzelne unter gewissen Bedingungen der Konstruktion bestimmt ist, eben so der Gegenstand des Begriffes, dem dieses Einzelne nur als sein Schema korrespondiert, allgemein bestimmt gedacht werden muß.“ (II 550.)

Obgleich aber beide Erkenntnisse, die mathematische sowohl als die philosophische, an sich gleich gewiß sind, so ist doch die Art derselben eine verschiedene. Jene wird auch Evidenz genannt, weil sie intuitiv und als solche klarer ist, als die bloß diskursive. Schon in einer vorkritischen Schrift, in der Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral 1763 (I 98) hatte Kant diese Verschiedenheit ausführlich begründet. Die Irrtümer, die in der Philosophie so häufig sind, haben ihren Grund nicht sowohl darin, daß der Verstand die Begriffe regellos verknüpft, sondern weil man dasjenige Merkmal, was man in einem Dinge nicht wahrnimmt, auch von ihm verneint und urteilt, daß dasjenige nicht sei, wessen man sich in einem Dinge nicht bewußt ist. Gegen solche Fehler ist aber die Mathematik aus mehrfachen Gründen geschützt.

Erstens gelangt sie zu ihren Begriffen synthetisch und kann sicher sagen, was sie sich in ihrem Objekte durch die Definition nicht hat vorstellen wollen, das ist darin auch nicht enthalten. Denn der Begriff des Erklärten entspringt erst durch die Erklärung und hat weiter gar keine Bedeutung als die ihm von der Definition erteilte. Die Philosophie hingegen ist in ihren Erklärungen weit unsicherer. Zweitens betrachtet die Mathematik in ihren Folgerungen und Beweisen ihre allgemeine Erkenntnis unter dem Zeichen in concreto, die Philosophie aber neben dem Zeichen noch immer in abstracto, und dies begründet weiter einen namhaften Unterschied in der Art beider zur Gewißheit zu gelangen. Denn da die Zeichen der Mathematik sinnliche Erkenntnismittel sind, so kann man, wie man dessen, was man mit Augen sieht, versichert ist, mit derselben Zuversicht auch wissen, daß man keinen Begriff außer Acht gelassen, daß eine jede einzelne Vergleichung nach leichten Regeln geschehen sei u. s. w. Obendrein wird die Aufmerksamkeit dabei noch dadurch sehr erleichtert, daß sie die Dinge nicht

in ihrer allgemeinen Vorstellung, sondern die Zeichen in ihrer einzelnen Erkenntnis, die sinnlich ist, zu behalten hat. Dagegen helfen die Worte, die Zeichen der philosophischen Erkenntnis, zu weiter nichts als zur Erinnerung der allgemeinen Begriffe. Man muß ihre Bedeutung jederzeit unmittelbar vor Augen haben. Auch die Anschaulichkeit der Erkenntnis ist in der Mathematik größer als in der Philosophie, da in der ersten das Objekt in sinnlichen Zeichen in concreto, in der letzten aber immer nur in allgemeinen abstrakten Begriffen betrachtet wird, deren klarer Eindruck bei weitem nicht so groß sein kann als der der ersteren. In der Geometrie, wo die Zeichen mit den bezeichneten Sachen überdies noch eine Aehnlichkeit haben, ist daher diese Evidenz noch größer, obgleich in der Buchstabenrechnung die Gewißheit eben so zuverlässig ist.

In der Kritik der reinen Vernunft geht Kant auf den Unterschied in der Evidenz zwischen Philosophie und Mathematik noch etwas genauer ein und setzt nun auseinander, wie keines von den drei Stücken, auf welchen die Gründlichkeit der Mathematik beruht, nämlich Definitionen, Axiome und Demonstrationen, von der Philosophie geleistet werden könne. Einer Definition im Sinne der Mathematik sind danach nur willkürlich gedachte Begriffe fähig, nicht aber empirische, oder auch a priori gegebene, wie z. B. Substanz, Ursache, Recht, Billigkeit; solche können höchstens expliziert werden. Die Juristen suchen daher vergeblich nach einer stichhaltigen Definition ihres Begriffs vom Recht. Daraus erklärt sich auch, daß bei mathematischen Definitionen ein Irrtum höchstens in der Form der Einkleidung vorliegen kann, so z. B., wenn in der Definition der Kreislinie diese eine krumme Linie genannt wird, weil das Wort „krumm" unnötig ist; denn daß diese Linie nicht gerade sein kann, folgt aus der Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Punkte gleichen Abstand von einem bestimmten Punkte haben. Ebenso wenig kann Philosophie von Axiomen solchen Nutzen erwarten, wie ihn die Mathematik genießt. Axiome sind synthetische Grundsätze a priori, sofern sie unmittelbar gewiß sind. Nun läßt sich aber Begriff mit Begriff nicht synthetisch und doch unmittelbar verbinden. „Mathematik aber

verknüpft durch Konstruktion der Begriffe in der Anschauung des Gegenstandes die Prädikate a priori und unmittelbar." Was endlich die Demonstrationen betrifft, so sind sie apodiktisch gewiß, nur insofern sie intuitiv sind. Aus Begriffen a priori allein aber kann nie anschauende Gewißheit oder Evidenz entspringen. Die Beweise in der Philosophie verdienten daher nur des Epitheton akroamatisch, denn sie zeigen nicht, daß der gegebene Begriff geradezu auf einen anderen Begriff führe, wie es die Anschauung a priori in der Mathematik thut, sondern nur, daß die Erfahrung selbst und mit ihr auch das Objekt der Erfahrung ohne eine solche Verknüpfung unmöglich wäre. Der philosophische Beweis müßte aber doch mehr leisten, nämlich zugleich die Möglichkeit zeigen, synthetisch und a priori zu einer gewissen Erkenntnis von Dingen zu gelangen, die in dem Begriffe von ihnen noch nicht enthalten war. Darum sind auch alle Versuche, den Satz vom zureichenden Grunde zu beweisen, vergeblich gewesen, sodaß man sich mit einer Berufung auf den gesunden Menschenverstand hat begnügen müssen.

Es ergiebt sich aus den angeführten Unterschieden, daß die Methode der Mathematik in keiner Weise auf Philosophie angewandt werden kann, und der Meßkünstler würde nach seiner Methode in der Philosophie nichts als Kartengebäude zustande bringen, wie der Philosoph umgekehrt nach der seinigen in der Mathematik nur ein Geschwätz erregen könnte. Sofern daher die Meister der Mathematik sich in den ihnen gezogenen Grenzen halten, thun sie ganz recht, wenn sie über Mathematik nicht weiter philosophieren und sich auch nicht darum kümmern, woher sie die Begriffe von Raum und Zeit bekommen, oder welches der Ursprung der reinen Verstandesbegriffe sei. Auf der andern Seite darf aber auch der Philosoph nicht das Verfahren des Mathematikers einschlagen und wie dieser seinen Lehrsätzen Definitionen vorausschicken, denn ihm können solche höchstens zu einem vorläufigen Versuche nützen. So z. B. hat Wolf die Aehnlichkeit in der Geometrie mit philosophischem Auge erwogen, um unter dem allgemeinen Begriffe derselben auch die in der Geometrie vorkommende za fassen, allein dem Geometer ist an der allgemeinen Definition der Aehnlichkeit

überhaupt gar nichts gelegen. (Ueber die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral 1763. (I. 79.) Und es ist nur ein Glück für den Mathematiker, daß, wenn er sich auch mit solchen analytischen Erklärungen abgiebt, in der That doch nichts bei ihm daraus gefolgert wird, sonst würde seine Wissenschaft demselben unglücklichen Zwiste ausgesetzt sein wie die Weltweisheit. Eine treffende Bestätigung für diese Bemerkung bietet die in neuerer Zeit von bedeutenden Gelehrten bezweifelte notwendige Wahrheit der geometrischen Axiome. Es bleibt immer das Geschäft der Weltweisheit, lediglich Begriffe, die als verworren gegeben sind, zu zergliedern und ausführlich und bestimmt zu machen, das der Mathematik aber, gegebene Begriffe von Größen, die klar und sicher sind, zu verknüpfen und zu vergleichen, um zu sehen, was hieraus gefolgert werden kann. Ihre Definitonen sind zwar unerweislich, aber gerechtfertigt, weil sie genetisch willkürlich und synthetisch sind; man könnte sie genauer Deklarationen nennen, sofern man dadurch seine Gedanken deklariert und Rechenschaft von dem giebt, was man unter einem Worte verstanden wissen will. In einem Existierenden z. B. wird nichts mehr gesetzt, als in einem bloß Möglichen; (denn dann ist die Rede von den Prädikaten desselben); allein durch ein Existierendes wird mehr gesetzt als durch ein bloß Mögliches, denn ersteres geht auch auf die absolute Position der Sache selbst. Was ferner die Anzahl der Axiome und unerweislichen Sätze in der Mathematik betrifft, so ist sie eine verhältnismäßig geringe; hierher gehören etwa die Begriffe der Größe überhaupt, der Einheit, der Menge, des Raumes und so weiter, aber ihre Zergliederung und Erklärung gehört auch gar nicht in diese Wissenschaft, weil sie nur durch willkürliche Verbindung ein Objekt erklärt, dessen Gedanke eben dadurch erst möglich wird. In der Philosophie aber giebt es unzählige unauflösliche Begriffe, wie z. B. den einer Vorstellung, des nebeneinander und nacheinander Sein. Andere können nur teilweise aufgelöst werden, wie der Begriff vom Raum, von der Zeit, von den verschiedenen Gefühlen, dem des Erhabenen, Schönen, Ekelhaften. „Ich gestehe," sagt Kant in der Untersuchung der Deutlichkeit der

Grundsätze 1763 (I 83), „daß die Erklärung von Lust und Unlust, Begierde und Abscheu und dergleichen unzählige, niemals durch hinreichende Auflösungen sind geliefert worden, und ich wundere mich über diese Unauflöslichkeit nicht."

Wenn aber Mathematik und Philosophie so tiefgehende Unterschiede zeigen, so ist es doch merkwürdig, daß trotzdem beide schon oft miteinander verquickt worden sind und es noch immer werden. Kant erklärt diese Thatsache daraus, (Kritik d. r. V. (II 552) daß die reine Vernunft, geblendet von den glänzenden Erfolgen, die sie ohne Beihilfe der Erfahrung in der Mathematik erzielt, dasselbe Glück im transcendentalen Gebrauche erhofft, wenn sie nur dieselbe Methode dort anwendet. Daß diese Erwartung unberechtigt ist, haben wir bereits gesehen. Es frägt sich aber noch, an welchen Bedingungen kann man denn erkennen, ob bei einem Gegenstande die mathematische Methode anwendbar sei oder nicht. Darauf antwortet Kant (S. 557): „Alle unsere Erkenntnis bezieht sich doch zuletzt auf mögliche Anschauungen, denn durch diese allein wird ein Gegenstand gegeben. Nun enthält ein Begriff a priori entweder schon eine reine Anschauung in sich, dann kann er konstruiert werden, oder nur die Synthesis möglicher Anschauungen, die a priori nicht gegeben sind, dann kann man zwar durch ihn synthetisch a priori urteilen, aber nur diskursiv, nach Begriffen, nicht intuitiv durch die Konstruktion des Begriffes. Nun ist von aller Anschauung keine a priori gegeben als die von Raum und Zeit, ein Begriff von diesen, als Quantis, läßt sich entweder zugleich mit der Qualität derselben (ihre Gestalt) oder auch bloß ihre Quantität (die bloße Synthesis des Gleichartigmanigfaltigen) durch Zahl a priori in der Anschauung darstellen d. i. konstruieren. Wenn man von einem Begriffe synthetisch urteilen soll, so muß man aus diesem Begriff hinausgehen, und zwar zur Anschauung, in welcher er gegeben ist. Wir können aber von dem Begriffe zu der ihm korrespondierenden reinen oder zu der empirischen Anschauung gehen, um ihn in derselben in concreto zu erwägen und a priori oder a posteriori zu erkennen, was dem Gegenstande desselben zukommt. Das Erstere ist die rationale oder mathematische Erkenntnis durch die Konstruk-

tion des Begriffs, das Zweite die bloße empirische Erkenntnis, die niemals notwendige und apodiktische Sätze geben kann. Den mathematischen Begriff eines Triangels würden wir konstruieren, d. i. a priori in der Anschauung geben und auf diesem Wege eine synthetische oder rationale Erkenntnis bekommen. Ist uns aber der transcendentale Begriff einer Realität, Substanz, Kraft gegeben, so bezeichnet er weder eine empirische noch eine reine Anschauung, sondern lediglich die Synthesis der empirischen Anschauungen, (die also a priori nicht gegeben werden können) und es kann also aus ihm auch kein bestimmender synthetischer Satz, sondern nur ein Grundsatz der Synthesis möglicher empirischer Anschauungen entspringen. Wenn demnach einmal der Fall eintritt, daß Mathematik und Metaphysik in ihren Aussagen über einen und denselben Gegenstand in Widerstreit geraten, und etwa, wie Kant in seiner Habilitationsschrift: Monadologia Physica 1763 (V 258) anführt, die Philosophie die unendliche Teilbarkeit des Raumes leugnet, Geometrie aber mit der ihr üblichen Bestimmtheit dieselbe behauptet, und ebenso in Bezug auf die Möglichkeit des leeren Raumes und der Wirkungen in die Ferne ihre Behauptungen sich widersprechen, so weist dies eben hin auf einen in der Methode des Denkens begründeten Gegensatz, und man müßte sich eigentlich „wie der Blinde des Cheselden fragen, (VIII 118) was betrügt mich, das Gesicht oder das Gefühl?" Und doch ist die skeptische Methode, wie sie Hume in die Metaphysik einführen wollte, in der Mathematik völlig ungereimt, weil sich in ihr keine falschen Behauptungen verbergen und unsicher machen können, indem die Beweise an dem Faden der reinen Anschauung und zwar durch evidente Synthesis fotgehen müssen.

In der Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral 1763 (I 104) hatte Kant noch gemeint, daß die Metaphysik keine anderen formalen oder materialen Gründe der Gewißheit habe als die Meßkunst. „In beiden geschieht das Formale der Urteile nach den Sätzen der Einstimmung und des Widerspruchs." In der Kritik der praktischen Vernunft 1788 (VIII 169) hingegen sagt er: „die Mathematik war

so lange noch gut weggekommen, weil Hume dafür hielt, daß ihre Sätze alle analytisch wären, d. i. von einer Bestimmung zur andern um der Identität willen, mithin nach dem Satze des Widerspruchs fortschritten (welches aber falsch ist, indem sie vielmehr alle synthetisch sind), und obgleich z. B. die Geometrie es nicht mit der Existenz der Dinge, sondern nur ihrer Bestimmung a priori in einer möglichen Anschauung zu thun hat, dennoch eben so gut, wie durch Causalbegriffe, von einer Bestimmung A zu einer andern B, als dennoch mit jener notwendig verknüpft, übergeht.)" Bei der skeptischen Methode würde die Mathematik für die Allgemeingiltigkeit ihrer Sätze auf den Beifall der Beobachter angewiesen sein, der in seinem Wankelmute die Mathematik und mit ihr schließlich jeden wissenschaftlichen Gebrauch der Vernunft in Mißkredit bringen muß. Die Wahrheit dieser Bemerkung haben denn auch diejenigen Mathematiker erfahren, die dem Vorbilde eines Gauss folgend, es nur für eine ungerechtfertigte Gewohnheit hielten, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten und deshalb die Hypothese, die Winkelsumme im Dreieck sei kleiner als zwei Rechte, weiter verfolgten. Es zeigte sich natürlich, daß diese Bestrebungen, eine in sich widerspruchsfreie Geometrie an die Stelle der Euklidischen zu setzen, scheitern mußten an der Erfahrung, daß in allen Fällen die Messung der Winkel zwei Rechte ergab, weil eben die Raumanschauung mit ihren Axiomen nicht von uns erst willkürlich gebildet wird, sondern a priori uns so gegeben ist. Man kann daher in gewissem Sinne sagen: daß nichts der Philosophie schädlicher gewesen sei, als die Mathematik, nämlich die Nachahmung derselben in der Methode zu denken, wo sie unmöglich kann gebraucht werden. Die Metaphysik kann nicht wie Geometrie und andere Teile der „Größenlehre" erst vom Leichteren anfangen und nach und nach zu schwereren Ausübungen übergehen, weil sie gleich im Anfange mit den schwierigsten Begriffen, wie Möglichkeit, Dasein, Notwendigkeit, Zufälligkeit u. s. w. sich abgeben muß, die alle große Abstraktion und Aufmerksamkeit erfordern. Man betrügt sich vielmehr nur selbst, wenn man glaubt, dem Meßkünstler sein Geheimnis, gründlich zu denken, abgelauscht zu haben, wie

er Definitionen voranschickt und mit Zuversicht daraus weiter folgert; denn der Mathematiker erwirbt seine Begriffe durch Zusammensetzen, während der Philosoph dies nur durch Auflösen thun kann, „welches die Methode zu decken ganz verändert.“ (Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral 1763. (I 96.)

Diese Verschiedenheit in der Methode zu denken erklärt nun auch die widersprechenden Aussagen, die von dem Unendlichen gemacht werden. Betrachten wir zunächst das unendlich Große. Die von den Optimisten behauptete Vollkommenheit dieser Welt war von ihren Gegnern geleugnet worden, indem sie darauf hinwiesen, daß eine vollkommenste unter allen Welten, wie die größte unter allen Zahlen, ein widersprechender Begriff sei, denn man könne ebensowohl zu einer Summe der Realität in einer Welt einige mehrere hinzuthun, wie zu der Summe der Einheiten in einer Zahl andere Einheiten können hinzugethan werden, ohne daß jemals etwas Größtes herauskommt. Es ist eben ein völliger Mißverstand, wenn man (im Hinblick auf die Zahlengröße) erklärt, die Vollkommenheit der Welt könne gar nicht wachsen; denn die Summe der Realität kann, wie die Summe der Einheiten einer Zahl wohl vermehrt werden; (Versuch die negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen 1763. (I 156.) nur ist die Summe der Realität nicht einerlei mit der Größe der Vollkommenheit. Unlust z. B. ist ebenso positiv wie Lust, wer möchte sie aber eine Vollkommenheit nennen? Die zusammenhängenden Teile eines Körpers ruhen, nicht weil Bewegkräfte fehlen, sondern weil sie einander entgegenwirken. Ebenso wenn wir glauben, in einer gänzlichen Unthätigkeit des Geistes zu sein, so ist nicht grade die Summe der Realgründe des Denkens und Begehrens kleiner als in dem Zustande, wo sich einige Grade der Wirksamkeit dem Bewußtsein offenbaren, denn die Seele befaßt, wie Leibnitz mit Recht sagt, das ganze Universum mit ihrer Vorstellungskraft, obgleich nur ein unendlich kleiner Teil der Vorstellungen klar ist. Kant kommt daher zu dem Schlusse: „Es ist gar keine größeste Zahl möglich, es ist aber ein größter Grad der Realität möglich, und dieser befindet sich in Gott. (Betrachtungen über den Optimismus

1759. (I 59). Hierbei definiert er den allgemeinen Begriff einer größten endlichen Zahl als einen abstrakten der Vielheit schlechthin, welche endlich ist, zu welcher aber gleichwohl mehr hinzugedacht werden kann, ohne daß sie aufhört endlich zu sein; in welcher also die Endlichkeit der Größe keine bestimmte, sondern nur allgemeine Schranken setzt, weswegen keiner von solchen Zahlen das Prädikat der größten zukommen kann. Bei der mathematischen Unendlichkeit hingegen ist das Endliche durch eine beständig fortgesetzte und immer mögliche Steigerung mit dem Unendlichen nach dem Gesetze der Kontinuität verbunden. Freilich kann dieser kontinuirliche Fortgang der Mathematik über die ihr gesetzten Schranken niemals zu anderen Wissenschaften hinüberleiten; denn wenn sie auch in ihrem eigenen Gebiete unbegrenzt ist und nirgends vollendet sein kann, Prolegomena 1783. (III 126), so anerkennt sie doch, daß Vieles außer ihr liege, wohin sie nie gelangen kann. So sind z. B. der unendliche Raum und die unendliche verflossene Zeit, da sie einer Erfahrung unzugänglich bleiben, bloße Ideen, während Mathematik nur auf Erscheinungen geht, und was, wie die Begriffe der Metaphysik und Moral, nicht Gegenstand der sinnlichen Anschauung sein kann, liegt ganz außerhalb ihrer Sphäre. Die Idee als Unendlichkeitsbegriff nimmt jedoch gewissermaßen ein körperliches Kleid an, um an Klarheit zu gewinnen. So wie die moralischen Eigenschaften der Gottheit unter den Vorstellungen des Zorns, der Eifersucht, Barmherzigkeit, Rache u. dgl. mehr vorgestellt werden; wie Dichter die Tugenden, Laster und andere Eigenschaften der Natur personifizieren, sodaß die wahre Idee des Verstandes hindurchscheint, so stellt der Geometer die Zeit durch eine Linie vor, obgleich Raum und Zeit nur eine Uebereinkunft in Verhältnissen haben, also wohl der Analogie nach, niemals aber der Qualität nach miteinander übereintreffen. Daher nimmt die Vorstellung der göttlichen Ewigkeit selbst bei Philosophen den Schein einer unendlichen Zeit an, so sehr man sich auch hütet, beide zu vereinigen. Dies ist auch mit die Ursache, weswegen die Mathematiker meist abgeneigt sind, die Leibnitz'schen Monaden einzuräumen; sie können nämlich nicht umhin, sich an ihnen kleine Klümpchen

vorzustellen (Träume eines Geistersehers 1766. (VI 60). Wenn wir uns überhaupt eine Dauer als unendlich oder als Ewigkeit denken, so thun wir dies nicht, weil wir von ihrer Größe irgend einen bestimmten Begriff haben — das ist unmöglich, da ihr die Zeit als Maß desselben gänzlich fehlt — sondern jener Begriff ist bloß ein negativer, wodurch wir in unserem Erkenntnis nicht um einen Fuß breit weiter kommen, vielmehr nur gesagt werden will, daß der Vernunft, sofern sie auf den Endzweck reflektiert, auf dem Wege beständiger Veränderungen nie Genüge gethan werden kann. Freilich kann ihr das Prinzip des Stillstandes und der Unveränderlichkeit der Weltwesen eben so wenig genügen, denn bei diesen würde sie in gänzliche Gedankenlosigkeit geraten. Es bleibt ihr also nichts übrig, als sich eine ins Unendliche (in der Zeit) fortgehende Veränderung zum Endzweck zu denken, bei welcher die Gesinnung bleibt und beharrlich dieselbe ist. (Das Ende aller Dinge 1794. (VII a. S. 419.) So wenig wie hier, ist der mathematische Unendlichkeitsbegriff geeignet die unendliche Schöpfungskraft Gottes zu begreifen, ob wir nun den Raum ihrer Offenbarung in einer Sphäre mit dem Radius der Milchstraße beschrieben einschließen, oder ob wir ihn in eine Kugel beschränken, die einen Zoll im Durchmesser hat. Denn alles was endlich, was seine Schranken und ein bestimmtes Verhältnis hat, ist von dem Unendlichen gleichweit entfernt. Hier, (in der allgemeinen Naturgeschichte des Himmels 1755) ringt Kant noch mit der Antinomie hinsichtlich der Weltgröße, ohne sie in ihrer Präzision fassen zu können. So sagt er in einer Anmerkung (VI 155): „Der Begriff einer unendlichen Ausdehnung der Welt findet unter den Metaphysikkundigen Gegner. Wenn diese Herren wegen der angeblichen Unmöglichkeit einer Menge ohne Zahl und Grenzen sich zu dieser Idee nicht bequemen können, so wollte ich nur vorläufig fragen, ob die künftige Folge der Ewigkeit nicht eine wahre Unendlichkeit von Manigfaltigkeiten und Veränderungen in sich fassen wird? und ob diese unendliche Reihe nicht auf einmal schon jetzt dem göttlichen Verstande gänzlich gegenwärtig sei?“ Wenn nun Gott den Begriff der Unendlichkeit, der seinem Verstande auf einmal

dasteht, in einer auf einander folgenden Reihe wirklich machen kann, warum sollte er nicht den Begriff einer anderen Unendlichkeit in einem Zusammenhange darstellen und dadurch den Umfang der Welt ohne Grenzen machen können? Unser Philosoph verschanzt sich also bei dieser Verlegenheit hinter dem Verstande Gottes und scheint sich darüber vollkommen zu beruhigen. Zwar verspricht er die angedeutete Schwierigkeit „durch eine aus der Natur der Zahlen gezogene Erläuterung“ zu heben, allein eine solche findet sich wenigstens in der „Naturgeschichte des Himmels“ nicht. Wir begegnen hier nur einer negativen Definition des Unendlichen (VI 209): „Das Unendliche ist unter allen Größen diejenige, welche durch Entziehung eines endlichen Teils nicht vermindert wird.“ Damit nähert er sich schon den trefflichen Erläuterungen dieses Begriffes in der Kritik der reinen Vernunft. Dort heißt es (II 342): „der wahre transcendentale Begriff der Unendlichkeit ist, daß die sucessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann. Dieses enthält dadurch eine Menge (von gegebener Einheit), die größer ist als alle Zahl, welches der mathematische Begriff der Unendlichkeit ist.“ In der Kritik der Urteilskraft 1790 (IV 110) definiert er diesen Begriff in ähnlicher Weise: „Das Unendliche ist schlechthin (nicht bloß komparativ) groß. Mit diesem verglichen, ist alles Andere (von derselben Art Größen) klein.“ Daß wir es trotzdem als ein Ganzes denken können, weist auf ein übersinnliches Vermögen im menschlichen Gemüte hin. Denn die gewöhnliche mathematische Größenschätzung, durch Zahlenbegriffe, bedarf als Einheit eines Maßstabes, der zum Unendlichen ein bestimmtes, in Zahlen angebbares Verhältnis hat, was doch unmöglich ist. Kant unterscheidet nämlich die mathematische oder logische Größenschätzung von der ästhetischen (Kritik der Urteilskraft 1790. (IV 116.) In jener wird die Unmöglichkeit, durch den Progressus der Messung der Dinge der Sinnenwelt in Zeit und Raum jemals zur absoluten Totalität zu gelangen, für objektiv erkannt d. h. für eine Unmöglichkeit, das Unendliche als ganz gegeben zu denken, und nicht bloß als subjektiv d. i. als Unvermögen, es zu

fassen. Denn hier wird auf den Grad der Zusammenstellung in eine Anschauung, als Maß, gar nicht gesehen, sondern Alles kommt dabei auf einen Zahlenbegriff an." Aber in einer ästhetischen Größenschätzung muß der Zahlenbegriff wegfallen oder verändert werden, und die Komprehension der Einbildungskraft zur Einheit des Maßes ist allein für sie zweckmäßig. Denn wenn die Einbildungskraft dennoch durch Zahlengrößen zur ästhetischen Zusammenfassung in eine größere Einheit aufgefordert wird, so fühlen wir uns als ästhetisch in Grenzen eingeschlossen, was das Gefühl der Unlust bei jeder Empfindung des Erhabenen hervorruft. Auf den Zahlenbegriff selbst und diese seine hier geforderte etwaige Modifikation ist Kant nicht näher eingegangen, worüber weiter unten noch das Nähere beigebracht werden soll.

Was schließlich die von einigen Philosophen erhobenen Bedenken gegen den Ausdruck „unendlich" betrifft, für welchen sie lieber „unbestimmt" wählen, so zeigt Kant (Kritik d. r. V. (II 403), daß eine solche Scheidung in der Mathematik eine leere Subtilität wäre, und daß man hier mit Recht nur von einem progressus in infinitum spricht, also beispielsweise von einer geraden Linie sagt, sie könne ins Unendliche verlängert werden. Freilich, wenn es heißt, ziehet eine Linie fort, so ist es richtiger, wenn man hinzusetzt „in indefinitum" als „in infinitum"; denn ersteres bedeutet: so weit ihr wollt, letzteres dagegen: ihr sollt mit der Verlängerung nie aufhören. Wenn jedoch nur vom Können die Rede ist. so ist das infinitum ganz richtig. Diese Scheidung zwischen infinitum und indefinitum führt uns nun zu dem, was Kant über das unendlich Kleine gesagt hat, wie er über die unendliche Teilbarkeit des Raumes und das sogenannte Gesetz der Kontinuität gedacht hat.

Daß der Begriff des unendlich Kleinen, auf den man in der Mathematik gelangt, wohl begründet sei, dafür scheint ihm die Natur „nicht undeutliche Beweistümer" an die Hand zu geben, und wenn Philosophen mit angemaßter Dreistigkeit ihn geradezu als erdichtet verwerfen, so beweisen sie nur, daß sie noch nicht genug davon verstehen, um ein Urteil darüber zu fällen. (Versuch die negativen Grössen

in die Weltweisheit einzuführen 1763. (I 117.) Denn wenn es Kräfte giebt, welche eine Zeit hindurch kontinuierlich wirken, um Bewegungen hervorzubringen, so muß die Kraft, die sie im Anfangsaugenblicke oder in Ruhe ausübt, gegen die, welche sie in einer Zeit mitteilt, unendlich klein sein.“ Er giebt zwar zu, daß es schwer ist, in die Natur dieser Begriffe einzudringen, diese Schwierigkeit kann aber nur eine gewisse Behutsamkeit unsicherer Vermutungen, aber nicht entscheidende Aussprüche der Unmöglichkeit rechtfertigen. Es wäre, sagt er, (Ob die Erde in ihrer Umdrehung um die Achse einige Veränderungen erlitten habe 1754. (VI 8) ein einem Philosophen sehr unanständiges Vorurteil, eine geringe Wirkung für „nichtswüdig“ zu erklären, die durch eine beständige Summierung dennoch auch die größte Quantität endlich erschöpfen muß. (Er spricht dort von dem hindernden Einfluß der Ebbe und Flut auf die Drehung der Erde.) Er betont daher vielfach, daß etwas unendlich Kleines darum doch nicht für nichts zu halten sei. So in den Vorlesungen über physische Geographie (VI 436.) „Wie wir denn überhaupt auch nicht die kleinste Kraft je als völlig nichts bedeutend betrachten dürfen, denn wäre sie auch noch so gering, so muß sie doch durch ihre wiederholte und vielfältige Aeußerung endlich eine gewisse Größe erreichen. Das kleinste Insekt stößt bei seinem Sprunge die Erde zurück, allein wie sich die Masse des Insekts zu der Masse der ganzen Erde verhält, so verhält sich auch der Stoß des Insekts zu der Bewegung der Erde, die durch den Stoß entsteht Und wenn bei irgend einem Ereignisse die Zeit zwischen der Causalität der Ursache und deren unmittelbaren Wirkung auch verschwindend (also beide zugleich sind), so ist doch das Verhältnis beider der Zeit nach bestimmbar (Kritik d. r. V. (II 172). Eben so kann auch Berührung als unendlich kleine Entfernung vorgestellt werden (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft 1786. (V 354.) Am meisten zu beachten ist hier aber jene Stelle in der Phoronomie, (V 328) wo er seine Definition der Ruhe als beharrliche Gegenwart an demselben Orte begründet. Danach ruht ein von A nach B aufwärts geworfener Körper nicht im höchsten Punkte B, sondern seine

Geschwindigkeit ist dort gesunken bis zu einem Grade, der kleiner ist, als jede nur anzugebende Geschwindigkeit, mit der er freilich in jeder noch so großen Zeit gleichförmig doch nur einen Raum zurücklegen würde, der kleiner ist, als jeder anzugebende Raum, mithin seinen Ort (für irgend eine mögliche Erfahrung) in alle Ewigkeit gar nicht verändern würde." Aus den wörtlich zitierten Ausdrücken ergiebt sich, wie Kant den Begriff des Differentials hier in seiner knappsten Form gefaßt, die auch heute noch die in den Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung gebräuchliche ist.

Von der unendlichen Teilbarkeit des Raumes spricht Kant ausführlich in der Kritik der reinen Vernunft bei der Auflösung der kosmologischen Idee von der Totalität der Teilung eines gegebenen Ganzen in der Erscheinung. Dieselbe gipfelt in der Bemerkung, daß man von einem ins Unendliche teilbaren Ganzen doch nicht sagen darf, es bestehe aus unendlich vielen Teilen. „Denn obgleich alle Teile in der Anschauung des Ganzen enthalten sind, so ist doch darin nicht die ganze Teilung enthalten, welche nur in der fortgehenden Dekomposition oder dem Regressus selbst besteht, der die Reihe allererst wirklich macht. Da dieser Regressus nun unendlich ist, so sind zwar alle Glieder (Teile), zu denen er gelangt, in dem gegebenen Ganzen als Aggregate enthalten, aber nicht die ganze Reihe der Teilung, welche successiv unendlich und niemals ganz ist, folglich keine unendliche Menge und keine Zusammennehmung derselben in einem Ganzen darstellen kann." Die unendliche Teilbarkeit des Körpers gründet sich auf der des Raumes, der die Möglichkeit des Körpers ausmacht, aber der Körper besteht deshalb nicht aus unendlichen Teilen. Diesen Satz von der unendlichen Teilbarkeit der Materie, den er in den metaphysischen Anfangsgründen noch eingehender behandelt, hat Kant aber in der vorkritischen Zeit noch nicht anerkannt, wie wir aus der bereits zitierten monadologia physica erlernen, wo er sich über diese Frage noch ziemlich im Unklaren befindet und neben der Teilbarkeit des Raumes behauptet, daß Materie aus unteilbaren Monaden bestehe. Dort giebt er, um die Teilbarkeit des metaphysischen Raumes zunächst zu begründen, für dieselbe einen geometrischen Be-

weis, der auch von anderen gegeben worden ist. Er fügt ihm aber noch einen eigenen hinzu, der hier wörtlich mitgeteilt sei: sunt quidem et aliae eiusdem sententiae demonstrationes in promptu, quarum ut unicum allegem, triangulum aequilaterum e monadibus, si ita arridet, constructum concipe, cuius si duo latera producantur in indefinitum, inque hisce sumseris distantias duplo, triplo, quintuplo, etc. lateribus trianguli dati maiores, harum extremitates lineis physicis iungi possunt, quae erunt in eadem ratione, ut illae tertio trianguli latere maiores tantundemque pluribus particulis simplicissimis constabunt. Quiavero inter quamlibet harum monadum atque eam, quae in vertice anguli constituta est, lineae physicae ductae concipi possunt, hae basin trianguli dati infinities dividunt adeoque spatii divisibilitatem infinitam egregie tuentur." Trotzdem läßt er die Behauptung der Metaphysiker, nach welcher die Materie aus primitiven oder einfachen Monaden besteht, unangefochten, weil der Raum der Materie nicht inhäriert. Quia vero spatium non est substantia, sed est quoddam externae substantiarum relationis phaenomenon, unius eiusdemque substantiae relationem bifariam dividi posse simplicitati vel si mavis unitati substantiae non contrariatur. Auf den Einwurf, daß was den Raum teilt, notwendig auch seinen Inhalt, die Monade, teilen müsse, antwortet er: „spatium hoc ipsum est ambitus externae huius elementi praesentiae. Qui itaque dividit spatium, quantitatem extensivam praesentiae suae dividit. At sunt praeter praesentiam externam h. e. determinationes substantiae respectivas aliae internae, quae nisi forent non haberent illae, cui inhaererent subiectum. Sed internae non sunt in spatio, propterae quia sunt internae. Neque itaque divisione externarum determinationum ipsae dividuntur, adeoque nec subiectum ipsum s. substantia hoc pacto dividitur. Pariter ac si dixeris: Deus omnibus rebus creatis per actum conservationis interne praesto est, qui itaque dividit congeriem rerum creatarum, dividit Deum, quia ambitum praesentiae suae dividit, quo magis absonum dici quicquam non potest."

Diese Antinomie findet naturgemäß eine bessere Auflösung in dem vierten Lehrsatze der Metaphysischen Anfangsgründe der Dynamik 1786. (V 351—358.) Dort behauptet er vor Allem, daß die physische Teilbarkeit der Substanz so weit geht als die mathematische des Raumes. Nun geht die letztere aber ins Unendliche, d. i. die Teile des Raumes können ins Unendliche unterschieden, obgleich nicht bewegt oder von einander getrennt werden. Da aber ein mit der Materie erfüllter Raum in allen seinen Teilen „repulsive Kraft“ also materielle Substanz besitzt, so geht auch die physische Teilung der Materie ins Unendliche. Man darf aber dennoch keine wirkliche Entfernung der Teile, die immer ein Kontinuum ausmachen, annehmen, obgleich die Möglichkeit dieser Erweiterung nur unter der Idee einer unendlich kleinen Entfernung anschaulich gemacht werden kann. Zwar hat Mathematik an sich keine Veranlassung sich um die Teilbarkeit der Materie zu kümmern, denn ihre Behauptung von der Teilbarkeit des Raumes ist so evident, daß sie in ihrem inneren Gebrauche „in Ansehung der Chikanen einer verfehlten Metaphysik“ ganz gleichgiltig sein kann. Allein die Anwendung der Mathematik auf Substanz, wie sie in der Dynamik stattfindet, zwingt sie doch, sich auf Metaphysik einzulassen. Wenn nämlich die Materie ins Unendliche teilbar ist, so besteht sie aus einer unendlichen Menge von Teilen; da man aber doch andererseits nicht einräumen kann, die Materie bestehe aus unendlich vielen Teilen, (weil es ein Widerspruch ist, eine unendliche Menge, die nie vollendet vorgestellt werden kann, sich als ganz vollendet zu denken), so müßte man sich „zwischen den Hörnern eines so gefährlichen Dilemmas“ zu einem entschließen: entweder dem Geometer zum Trotze zu sagen, der Raum ist nicht ins Unendliche teilbar, oder dem Metaphysiker zum Aergernis: der Raum ist keine Eigenschaft eines Dinges an sich selbst, und also die Materie kein Ding an sich selbst, sondern bloße Erscheinung unserer äußeren Sinne. In der That ist dies Letztere auch der nützlichste Ausweg, zu dem sich der Philosoph bequemt. Er nimmt Materie und Raum nicht als Dinge an sich an, gewinnt aber für diesen Verzicht auf die gemeine Meinung den

Vorteil, daß er die Schwierigkeit wegen der unendlichen Teilbarkeit der Materie, wobei sie doch nicht aus unendlich vielen Teilen bestehe, leicht beseitigt. Das läßt sich nun ganz wohl durch die Vernunft denken, obgleich unmöglich anschaulich machen oder konstruieren. Denn, was wie Materie und Raum, nur dadurch wirklich ist, daß es in der Vorstellung gegeben ist, davon ist auch nicht mehr gegeben, als so viel in der Vorstellung angetroffen wird, d. i. so weit der Progressus der Vorstellungen reicht. Also von Erscheinungen, deren Teilung ins Unendliche geht, kann man nur sagen, daß die Teile der Erscheinung so viele sind, als wir deren nur geben, d. i. soweit wir nur immer teilen mögen. Denn die Teile, als zur Existenz einer Erscheinung gehörig, existieren nur in Gedanken, nämlich in der Teilung selbst. Nun geht zwar die Teilung ins Unendliche, aber sie ist doch niemals als unendlich gegeben; also folgt daraus, daß die Teilung ins Unendliche geht, nicht, daß das Teilbare eine unendliche Menge Teile an sich und außer unserer Vorstellung in sich enthalte. Denn es ist nicht das Ding an sich, sondern die Vorstellung desselben, deren Teilung zwar ins Unendliche fortgesetzt werden kann, die aber dennoch nie vollendet, folglich auch nie ganz gegeben werden kann; also beweist sie auch keine wirkliche unendliche Menge im Objekt, die freilich ein ausdrücklicher Widerspruch sein würde. Es sei hier noch zum Schlusse die bemerkenswerte Aeußerung Kant's angeführt, daß Cavalerius die Methode des unendlich Kleinen in die Meßkunst eingeführt hat. (Von der Schätzung der leb. Kräfte 1747. (V 152.) Damit unterschätzte er jedoch die Leistungen der Geometer des Altertums in dieser Hinsicht. Denn ihre Berechnungen des Kreises und anderer krummlinigen Ebenen enthielten die Methode doch wenigstens in nuce.

In engem Zusammenhange mit diesen Auseinandersetzungen über das unendlich Kleine steht das, was er an verschiedenen Stellen vom Gesetz der Kontinuität sagt. Auch hier besteht in den vorkritischen Schriften ein unsicheres Schwanken, welches erst in der Kritik der reinen Vernunft völlig beseitigt wird. Er erwähnt ein physisches, logisches, mechanisches und ein metaphysisches Gesetz der Kontinuität.

In der Abhandlung von der Schätzung der lebendigen Kräfte (V S. 44) folgert er auf Grund dieses Leibnitz'schen Gesetzes, das er offenbar noch nicht in seiner ganzen Präzision gefaßt hat und von dem er selbst sagt, daß man seinen weitläufigen Nutzen vielleicht noch nicht genug kennen gelernt hat: „Was da überhaupt gilt, wenn ein Körper sich eine Zeit lang bewegt hat, das muß auch gelten, wenn gleich nur die Bewegung im Anfange ist, denn eine sehr kleine Dauer der Bewegung ist von dem bloßen Anfang derselben nicht unterschieden, oder man kann sie füglich verwechseln, und glaubt damit die Ungereimtheit des Leibnitz'schen Kräftemaßes bewiesen zu haben. So identifiziert er auch weiter unten S. 161 eine unendlich kleine Dauer der Bewegung mit dem Anfangspunkte derselben d. h. mit der Ruhe, was ihn dann S. 184 zu einer Einschränkung des Leibnitz'schen Kräftemaßes führt, daß es nämlich nur nach Ablauf einer endlichen Zeit seine Giltigkeit erhalte. Die Verwirrung, welche dieses Gesetz zwischen Cartesianern und Leibnitzianern angerichtet hatte, mochte wohl der Grund sein, daß Kant dasselbe einige Jahre später, in der Abhandlung: Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe 1758. (V S. 285), als ein willkürliches bezeichnete und es in physischer Bedeutung ganz verwarf. Danach sollte nämlich ein Körper dem andern eine Kraft nicht auf einmal mitteilen, sondern so, daß er durch alle unendlich kleinen Zwischengrade von der Ruhe an bis zur bestimmten Geschwindigkeit seine Kraft auf ihn überträgt.

Dasselbe Gesetz im logischen Sinne nennt er eine sehr schöne und richtige Regel zum Urteilen und führt in einer Anmerkung als Beispiele davon an: Was da überhaupt gilt, wenn ein Körper auf einen anderen bewegten anstößt, das gilt auch, wenn er einen ruhenden trifft, denn die Ruhe ist als unendlich kleine Bewegung anzusehen. Wenn ein Kräftemaß von der wirklichen Bewegung überhaupt gilt, so muß es auch vom bloßen Drucke gelten; denn der Druck kann als eine wirkliche Bewegung durch einen unendlich kleinen Raum angesehen werden. Aehnlich formuliert er dieses Gesetz in den Metaphysischen Anfangsgründen 1786. (V 419) dahin, daß an keinem Körper der Zustand der

Ruhe oder der Bewegung und an dieser der Geschwindigkeit oder der Richtung durch den Stoß in einem Augenblicke verändert wird, sondern nur in einer gewissen Zeit, durch eine unendliche Reihe von Zwischenzuständen, deren Unterschied von einander kleiner ist als der des ersten und letzten. Diese lex continui mechanica gründet sich auf das Gesetz der Trägheit und Kant giebt einen ausführlichen Beweis für dasselbe in der Abhandlung de mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis 1770. (I S. 318). Dort heißt es: Celeb. Kaestnerus hanc Leibnitzii legem examini subiecturus provocat eius defensores, ut demonstrent: motum puncti continuum per omnia latera trianguli esse impossibilem, quod utique, concessa lege continuitatis, probari necesse est. En igitur demonstrationem quaesitam. Denotent litterae a, b, c tria puncta angularia trianguli rectilinei. Si mobile incedat motu continuo per lineas ab, bc, ca. h. e. totum perimetrum figurae, necesse est, ut per punctum b in directione a b, per idem autem punctum b etiam in directione bc moveatur. Cum autem hi motus sunt diversi, non possunt esse simul. Ergo momentum praesentiae puncti mobilis in vertice b, quatenus movetur in directione ab est diversum a momento praesentiae puncti mobilis in eodem vertice b, quatenus movetur secundum directionem b c. Sed inter duo momenta est tempus, ergo mobile in eodem puncto per tempus aliquod praesens est, i. e. quiescit, ideoque non incedit motu continuo, quod contra hypothesin. Eadem demonstratio valet de motu per quaslibet rectas angulum includentes dabilem. Ergo corpus non mutat directionem in motu continuo nisi secundum lineam, cuius nulla pars est recta, h. e. curvam, secundum placita Leibnitzii. In allgemeiner Fassung giebt er dies Gesetz in der Kritik der reinen Vernunft (II S. 147) mit den Worten: „Die Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmögliche (kein Teil einfach) ist, heißt die Kontinuität derselben. Raum und Zeit sind quanta continua; weil kein Teil derselben gegeben werden kann, ohne ihn zwischen Grenzen (Punkten und Augenblicken) ein-

zuschließen, mithin nur so, daß dieser Teil selbst wiederum ein Raum oder eine Zeit ist." Aber nicht nur für diese extensiven Größen gilt das Gesetz der Kontinuität, sondern auch für die von Kant als intensive bezeichneten. Was an den Erscheinungen als Aggregat angeschaut wird, ist ihre extensive Größe, da diese nur durch die succesive Synthesis von Teil zu Teil erkannt werden kann. Die Empfindung aber, welche jede Wahrnehmung begleitet, hat einen Grad, und das ist ihre intensive Größe. In der Empfindung ist keine Anschauung von Raum oder Zeit, sie hat aber doch insofern eine Größe, als das empirische Bewußtsein von Null bis zu einem gewissen Maße in einer bestimmten Zeit anwachsen kann. Nun definiert aber Kant (II 761) den allgemeinen Begriff der Größe als das Bewußtsein des Manigfaltig-Gleichartigen in der Anschauung, sofern dadurch die Vorstellung eines Objekts zuerst möglich wird. Die intensive Größe soll doch aber gar nichts von einem Manigfaltigen enthalten. Man sieht, der Name „intensive Größe" für den Grad in der Empfindung ist nicht glücklich gewählt, denn ihre Teile sind nicht außerhalb einander wie z. B. die einer Geschwindigkeit, (Metaphysische Anfangsgründe 1786. (V 338), und die Bezeichnung Größe ist für sie nur soweit zutreffend, als sie einer Verringerung fähig ist, bis sie allmählich verschwindet. Daher sagt Kant von den intensiven Größen, daß sie nur als Einheit apprehendiert werden, und Vielheit kann in ihnen nur durch Annäherung zur Negation gleich Null vorgestellt werden. Hätte er für diese Größen den Namen der fließenden substituiert, so hätte man hierin eine Andeutung zur Begründung der Infinitesimalrechnung finden können; man hätte schließen können, unser Philosoph habe hiermit die Berechtigung der von Newton Fluxionen genannten Differentialgrößen zeigen wollen, weil es ja in der That bislang für ungerechtfertigt gehalten worden ist, die unendlich kleinen Größen, mit welchen sich die Infinitesimalrechnung abgiebt, bald für etwas und bald für nichts zu halten oder gar einen Quotienten derselben zu bilden, der eigentlich $\frac{0}{0}$ bedeuten soll. Es ist um so mehr zu verwundern, daß Kant diese Benennung für die intensiven Größen nicht gebraucht hat,

als er diesen Namen wohl kennt und ihn für Punkte und Augenblicke anwendet; „dergleichen Größen kann man auch fließende nennen, weil die Synthesis (der produktiven Einbildungskraft) in ihrer Erzeugung ein Fortgang in der Zeit ist, deren Kontinuität man besonders durch den Ausdruck des Fließenden (Verfließens) zu bezeichnen pflegt." (Kritik d. r. V. (II 147.) Jedenfalls dürfte eine andere Stelle der Kritik der reinen Vernunft beweisen, daß Kant das Problem des Differentialquotienten richtig erfaßt und zu dessen Lösung manchen wichtigen Fingerzeig gegeben hat. Wir glauben denselben gefunden zu haben sowohl in dem, was er intensive Größen genannt hat, als auch in folgender Erläuterung des Gesetzes der Kontinuität (II 175): „Wenn eine Substanz aus einem Zustande a in einen andern b übergeht, so ist der Zeitpunkt des zweiten vom Zeitpunkt des ersteren Zustandes unterschieden und folgt demselben. Ebenso ist auch der zweite Zustand als Realität (in der Erscheinung) vom ersteren, darin diese nicht war, wie b vom Zero unterschieden, d. i. wenn der Zustand b sich auch von dem Zustande a nur der Größe nach unterschiede, so ist die Veränderung ein Entstehen von b—a, welches im vorigen Zustande nicht war, und in Ansehung dessen er gleich Null ist." Er zeigt dann, daß die Größe der Realität (b a) durch alle kleineren Grade, die zwischen dem ersten und letzten enthalten sind, erzeugt wird, so wie die Zeit vom Anfangsaugenblick a bis zu ihrer Vollendung in b wächst. Es ist kein Unterschied des Realen in der Erscheinung der kleinste, und der neue Zustand erwächst durch alle unendliche Grade der Realität, deren Unterschiede von einander alle kleiner sind als der zwischen 0 und a. „Welchen Nutzen dieser Satz in der Naturforschung haben möge, das geht uns hier nichts an." Aber es lag nahe, den Nutzen dieses Satzes für die höhere Analysis weiter zu verfolgen, was Kant leider unterlassen hat. Man braucht nur die jetzt üblichen Zeichen für die von ihm hier gebrauchten Ausdrücke zu substituieren, für sein (b a) das gebräuchliche dx, und für das Wachsen der Zeit von a bis b das dt zu setzen, um klar zu sehen, wie Kant hier eine Metaphysik des Diffe-

rentialquotienten versucht hat. Hält man hiermit noch zusammen, was er in dem „Versuch die negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen“ 1763. (I 123) vom nihil negativum sagt, was auf die Unterscheidung zwischen relativer und absoluter Null hinauskommt, so erkennt man daß dx und dt eben solche relative Nullen sind; nur ihrer Extension nach haben sie keine Größe, wohl aber ihrer Intension nach, und weil sie als kontinuierliche Größen auch Teile haben, so hat auch ihr Quotient $\frac{dx}{dt}$ seine volle Berechtigung.

Dasselbe Verdienst, welches unser Philosoph sich um die richtige Fassung des eben besprochenen Gesetzes erworben hat, gebührt ihm auch hinsichtlich einer gründlichen Erörterung der Begriffe „positiv“ und „negativ“, die in der Mathematik so häufig angewandt werden, jedoch oft genug mit dem Mißverständnisse, als ob diese Wörter absolute Eigenschaften der Größen bezeichneten. In der zuletzt genannten Abhandlung rektifiziert er zunächst den gangbaren Begriff der negativen Größen, wie ihn die Mathematiker gebrauchen, dahin, daß derselbe nur relativ zu verstehen sei. Nachdem er den Unterschied zwischen der logischen und der Realrepugnanz dargelegt hat, wonach bei jener die Folge gar nichts, bei dieser aber ein nur verhältnismäßiges Nichts oder etwas ist oder Zero gleich Null, fährt er S. 123 fort: „Diejenigen Größen, vor denen — steht, haben dieses nur als ein Zeichen der Entgegensetzung, sofern sie mit denen, die + vor sich haben, zusammen genommen werden sollen; stehen sie aber mit denen, vor welchen auch — steht, in Verbindung, so findet hier keine Entgegensetzung mehr statt, weil diese ein Gegenverhältnis ist, welches nur zwischen + und — angetroffen wird. Und da die Subtraktion ein Aufheben ist, welches geschieht, wenn entgegengesetzte Größen zusammen genommen werden, so ist klar: daß das — eigentlich nicht ein Zeichen der Subtraktion sein könne, wie es gemeiniglich vorgestellt wird, sondern daß + und — zusammen nur erst eine Abziehung bezeichnen. Ebenso bedeutet das Zeichen + für sich allein eigentlich keine Addition, sondern nur insofern die Größe, davor es steht, mit einer andern, davor auch + steht oder gedacht wird, soll

verbunden werden. Soll sie aber mit einer, davor — steht, zusammengenommen werden, so kann dieses nur vermittelst der Entgegensetzung geschehen, und da bedeutet das Zeichen + sowohl als — eine Subtraktion, nämlich, daß eine Größe in der anderen, so viel ihr gleich ist, aufhebe. Hieraus entspringt der mathematische Begriff der negativen Größen. Eine Größe ist in Ansehung einer andern negativ, insofern sie mit ihr nicht anders als durch die Entgegensetzung kann zusammengenommen werden. So daß man also eigentlich keine Größe schlechthin negativ nennen kann, sondern sagen muß, daß + a und — a Eines die negative Größe des Andern sei; allein da dieses im Sinne kann hinzugedacht werden, so haben die Mathematiker einmal den Gebrauch angenommen, die Größe, vor welcher — steht, negative Größen zu nennen, wobei man gleichwohl nicht aus der Acht lassen muß, daß diese Benennung nicht eine besondere Art Dinge ihrer inneren Beschaffenheit nach, sondern dieses Gegenverhältnis anzeige. Demzufolge wäre es auch ungereimt, eine besondere Art von Dingen sich zu denken und sie in der Philosophie negative Dinge zu nennen, denn „selbst der Ausdruck der Mathematiker der negativen Größen ist nicht genau genug." Die in der Philosophie durch negativ und positiv zu bezeichnende Realrepugnanz findet nur statt, insofern zwei Dinge als positive Gründe eines die Folge des andern aufhebt. Die Fahrt gegen Abend ist ebensowohl eine positive Bewegung als die gegen Morgen, nur in eben demselben Schiffe heben sich die dadurch zurückgelegten Wege ganz oder zum Teil auf. Kant giebt dann einige Beispiele von negativen Größen in der Philosophie: Undurchdringlichkeit ist negative Anziehung, Unlust negative Lust, Verabscheuung negative Begierde, Haß negative Liebe, Häßlichkeit negative Schönheit, Tadel negativer Ruhm, Irrtum negative Wahrheit, Widerlegung negativer Beweis, Untugend negative Tugend, Verbot negatives Gebot, Strafe negative Belohnung. Jedes Vergehen ist ein negatives Entstehen, d. i. es wird, um etwas Positives, was da ist aufzuheben, eben sowohl ein wahrer Realgrund erfordert als um es hervorzubringen, wenn es nicht ist, denn es sei a gesetzt, so ist nur $a - a = 0$.

Wie hier, so „rechnet“ Kant auch sonst noch mit negativen Größen in der Philosophie. So z. B. in der Tugendlehre 1797, (IX S. 228): „Der Tugend gleich + a ist die negative Untugend (moralische Schwäche) gleich Null als logisches Gegenteil, das Laster aber gleich — a als Widerspiel entgegengesetzt.“ Und S. 236 „die Erfüllung derselben (der Tugendpflichten) ist Verdienst gleich + a: ihre Uebertretung ist nicht sofort Verschuldung gleich — a, sondern bloß moralischer Unwert gleich Null, außer wenn es dem Subjekt Grundsatz wäre, sich jenen Pflichten nicht zu fügen.“ Endlich auch in der Religion innerhalb der Grenzen der blossen Vernunft 1793 beweist er „durch Rechnung“, daß Verstöße gegen das moralische Gesetz nur als Folgen einer bösen Willkür gedacht werden können. (X S. 23 u. 24): Wenn das Gute gleich a ist, so ist sein kontradiktorisch Entgegengesetztes das Nichtgute. Dieses ist nun die Folge entweder eines bloßen Mangels eines Grundes des Guten gleich Null, oder eines positiven Grundes des Widerspiels desselben gleich — a. Im letzteren Falle kann das Nichtgute auch das positive Böse heißen. (In Ansehung des Vergnügens und Schmerzes giebt es ein dergleichen Mittleres, so daß das Vergnügen gleich a, der Schmerz gleich — a, und der Zustand, worin keines von beiden angetroffen wird, die Gleichgiltigkeit, gleich Null ist.) Wäre nun das moralische Gesetz in uns keine Triebfeder der Willkür, so würde Moralischgut gleich a. Nichtgut gleich 0, dieses aber die bloße Folge vom Mangel einer moralischen Triebfeder — a × 0 sein. Nun ist es aber Triebfeder in uns gleich a, folglich ist der Mangel der Uebereinstimmung der Willkür mit demselben (gleich Null) nur als Folge von einer relativ entgegengesetzten Bestimmung der Willkür d. i. einer Widerstrebung derselben gleich — a. d. i. nur durch eine böse Willkür möglich; und zwischen einer bösen und guten Gesinnung, nach welcher auch die Moralität der Handlung beurteilt werden muß, giebt es nichts Mittleres. Die Einführung der negativen Größen in die Weltweisheit leitet ihn schließlich zu folgenden zwei Sätzen: „In allen natürlichen Veränderungen der Welt wird die Summe des Positiven, insofern sie dadurch geschätzt wird, daß einstimmige Posi-

tionen addiert und real entgegengesetzte von einander abgezogen werden, weder vermehrt noch vermindert." „Alle Realgründe des Universums, wenn man diejenigen summiert, welche einstimmig sind, und die von einander abzieht, die einander entgegengesetzt sind, geben ein Fazit, das dem Zero gleich ist." Freilich gesteht er hier selbst, daß diese beiden Sätze nicht „Licht" genug für ihn haben, und nicht mit genugsamer Augenscheinlichkeit aus ihren Gründen einzusehen sind. Das ist ihm erst später in der Kritik der reinen Vernunft gelungen bei der Entwickelung der Lehre von der Substanz. Insofern nämlich jeder Realgrund durch seine Position sein kontradiktorisches Gegenteil verneint, ist er positiv und negativ zugleich. Jedes natürliche Entstehen hat folglich immer ein entsprechendes Vergehen zur Seite, so daß also die Summe des Realen unveränderlich ist, und die Summe der positiven und negativen Positionen als Fazit stets Null ergiebt. So viel ergiebt sich aus diesen Sätzen, daß Kant seine Spekulation über positive und negative Größen nicht ganz durchgeführt hat.

Dasselbe gilt von dem Zahlenbegriffe im Allgemeinen, wie wir schon oben anzudeuten Gelegenheit hatten. Wir begegnen einer Aeußerung über denselben zuerst in der Abhandlung: de mundi sensibilis 1770. (I S. 315), wo er erklärt, daß die reine Mathematik in der Geometrie ausschließlich den Raum, in der Mechanik die Zeit zum Gegenstande ihrer Betrachtung habe, beide zusammen aber in der Arithmetik: Hinc Mathesis Pura spatium considerat in Geometria, tempus in Mechanica Pura. Accedit hisce conceptus quidam intellectualis, sed cuius tamen actuatio in concreto exigit opitulantes notiones temporis et spatii (successive addendo plura et iuxta se simul ponendo), qui est conceptus Numeri, quem tractat Arithmetica. In der Kritik der reinen Vernunft (II 96) wird die Zahl definiert als das Bewußtsein der Einheit der Synthesis von Einem zu Einem. „Vergesse ich im Zählen, daß die Einheiten, die mir jetzt vor Sinnen schweben, nach und nach zu einander von mir hinzugethan worden sind, so würde ich die Erzeugung der Menge durch diese successive Hinzuthuung von Einem zu Einem, mithin auch nicht die

Zahl erkennen." Und 30 Seiten weiter, wo der Raum das reine Bild aller Größen vor dem äußern Sinne, die Zeit das aller Gegenstände der Sinne überhaupt genannt wird, wird die Zahl als das reine Schema der Größe bezeichnet, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenfaßt. Also ist die Zahl nichts Anderes als die Einheit der Synthesis des Manigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge." Hier kommt also der Raum bei der Erzeugung des Zahlenbegriffs gar nicht mehr in Betracht. Und endlich in den Prolegomenen 1783. (III S. 38) sagt er auch wieder: „Arithmetik bringt selbst ihre Zahlenbegriffe durch successive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit zustande", also ebenfalls anders als in der Abhandlung de mundi sensibilis . . . . . Man sieht hieraus, daß Kant zwar mehrfach versucht hat, den Zahlenbegriff genauer zu präzisieren, daß ihm dies aber nicht recht hat gelingen wollen. Im Uebrigen sei hier auf die bereits erwähnte Abhandlung von Dr. Michaelis verwiesen. Nur ist hervorzuheben, daß nicht wie der Verfasser meint, unser Zählen eine reine Synthesis im Kant'schen Sinne genannt werden darf, weil ja der gemeinschaftliche Grund der synthetischen Einheit ein willkürlicher ist, und statt der Dekadik etwa auch die Tetratik angewandt werden könnte. Das Progressionsprinzip ist, wie Kant selbst in der Kritik der Urteilskraft (IV 109) bemerkt, nur ein nach Uebereinkunft angenommenes aber nicht notwendiges.

Die successive Synthesis verwertet Kant auch zu einer Definition der Geometrie, indem er von ihr in der Kritik der reinen Vernunft (II 143) sagt: „Auf diese successive Synthesis der produktiven Einbildungskraft in der Erzeugung der Gestalten gründet sich die Mathematik der Ausdehnung (Geometrie) in ihren Axiomen, welche die Bedingungen der sinnlichen Anschauung a priori ausdrücken." Von einer praktischen Geometrie als besonderer Wissenschaft kann demnach keine Rede sein, selbst die Feldmeßkunst verdient, wie er in der Abhandlung: Philosophie überhaupt 1794. (I 583) erklärt, diesen Namen nicht, obgleich noch so viel

praktische Sätze in dieser reinen Wissenschaft enthalten sind; sie gehört vielmehr in Scholien der reinen Geometrie, nämlich dem Gebrauche dieser Wissenschaft zu Geschäften. Die Anweisung, eine Parabel nach Vorschrift der Theorie zu zeichnen, ist nur für den Künstler, nicht für den Geometer. (Ueber eine Entdeckung . . . . zur Kritik d. r. V. 1790. (I 406.)

Wenn wir endlich nach diesem allgemeinen Umriß über die einzelnen mathematischen Dinge, die Kant besprochen hat, der Frage näher treten, wie weit Kant es eigentlich in der Mathematik gebracht hatte, so müssen wir freilch gestehen, daß er in das Gebiet der höheren Mathematik nicht allzuweit eingedrungen zu sein scheint. Es findet sich beispielsweise nirgends bei ihm eine Erwähnung des Integrals und selbst das Differential wird kaum genannt. (Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels 1755. (VI 145). Diese Thatsache verdient wohl beachtet zu werden, da er in allen seinen Schriften mit Vorliebe auf Beispiele aus der Mathematik verweist, wie wir weiter unten dies ausführlich zeigen werden. Die analytische Geometrie scheint ihm auch nur in ihren elementaren Teilen bekannt gewesen zu sein. Außer den Kegelschnitten finden sich nur noch erwähnt die „Loxodromie“ (Vorlesungen über physische Geographie (VI 608), auf deren Konstruktion, weil sie zu weitläufig sei, er nicht eingeht, und die Epicycloide (Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes 1763. (I 245) „die eine ziemlich verwickelte Konstruktion zum Grunde hat.“ Die analytische Mechanik scheint er auch nicht weiter als in ihren Hauptsätzen gekannt zu haben. Dies würde sich deutlich zeigen bei einer Darstellung von Kant als Physiker, welche als Fortsetzung der vorliegenden Abhandlung in Aussicht genommen ist. Nur an einer einzigen Stelle (Prolegomena (III S. 147) erwähnt er den calculus probabilium, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wo er von ihr sagt, daß sie nicht etwa nur wahrscheinliche, sondern ganz gewisse Urteile enthält über den Grad der Möglichkeit gewisser Fälle unter gegebenen gleichartigen Bedingungen, die in der Summe aller möglichen Fälle ganz unfehlbar der Regel gemäß zutreffen müssen, ob diese gleich in An-

sehung jedes einzelnen Zufalls nicht genug bestimmt ist.“ Auch die nicht gerade zahlreichen Beispiele, wo Kant rechnend verfährt, zeigen, daß er nur die Elementarmathematik gründlich beherrscht hat. So berechnet er (Ob die Erde in ihrer Achsendrehung einige Veränderung erlitten habe? 1754. (VI S. 9) „den Anfall, den das Weltmeer gegen die morgenländischen Küsten des festen Landes von Amerika thut“, um daran die Wirkung der Ozeansbewegung von Ost nach West auf die Achsendrehung der Erde „einigermaßen schätzen zu können“. Allein diese „Rechnung“ beginnt gleich mit unzulässigen Ungenauigkeiten, denn er läßt den in Rede stehenden Erdteil sich bis zu beiden Polen erstrecken dadurch, „daß wir, was daran fehlt durch die hervorragende Spitze von Afrika und durch die orientalischen Küsten Asiens mehr als überflüssig ersetzen.“ Er findet auf solchem Wege, daß dieses Hindernis die Achsenbewegung der Erde in zwei Millionen Jahren erschöpfen würde, wenn man die Geschwindigkeit des flutenden Meeres bis ans Ende gleich ein Fuß in einer Sekunde und die Dichtigkeit der Erde gleich der des Wassers setzt. Freilich erkennt er diese Ungenauigkeiten selbst, aber seine Ausgleichungen derselben sind nichts Besseres. Ebenso ungenau ist eine Berechnung in: Ob die Erde veralte? 1754. (VI 35. 26). um die Meinung, der Salzgehalt des Meeres stamme aus der festen Erde, zu widerlegen. „Nach dieser Rechnung wäre der Ozean seit der Schöpfung durch den Einfluß aller Bäche und Ströme schon zehn Mal voll geworden.“ Weit genauer sind die Rechnungen in der allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels 1755 (VI 82. 111.) Seite 82 wird die Bewegung der Fixsterne durch Rechnung wahrscheinlich gemacht; Seite 111 findet er das Verhältnis der Dichtigkeit des planetarischen Grundstoffes beim Beginn des Weltbaues zu der der atmosphärischen Luft gleich 1 : 420000000000000. Freilich erheben auch diese Rechnungen keinen Anspruch auf mathematische Genauigkeit. Aber selbst wo ein solcher gerechtfertigt ist, wie z. B. bei der Berechnung der Zeit der Achsendrehung des Saturn, findet er nur ungenaue Werte, nämlich 6^{h} 23^{m} 53^{s}, während der richtige Wert 10^{h} 16^{m} 44^{s} ist. Allerdings fügt Kant hinzu, daß

„diese mathematische Betrachtung“ von den Beobachtungen künftiger Zeiten die Bestätigung erwartet. Aber auch mit Haaresbreiten weiß unser Philosoph zu rechnen. In der Betrachtung der Erderschütterungen 1756 berechnet er die Anziehung des Jupiter auf das Wasser des Ozeans und findet den 65sten Teil eines Dezimalskrupels oder „ungefähr den 30sten Teil einer Haaresbreite“, für Mars und Venus beträgt dieselbe noch nicht ein Drittel einer Haaresdicke, und alle Planeten zusammen in Konjunktion ziehen es noch nicht um eine halbe Haaresbreite an. Eben so wenig wie die hier kurz angeführten Rechnungen eine eingehende Kenntnis der Mathematik beweisen, eben so wenig deuten darauf hin die zahlreichen Stellen, wo Kant seine Gedanken durch Beispiele aus der Mathematik klar zu machen sucht. Es seien hier nur wenige dieser Stellen angeführt. Wenn er in der Grundlegung zur Metaphysik der Sitten 1785 (VIII. 32) zeigen will, daß der Satz: wer den Zweck will, will auch die Mittel, in Bezug auf das Wollen analytisch ist, so weist er hin auf die Halbierung einer geraden Linie. Daß man zu diesem Zwecke zwei „Kreuzbogen“ aus den Enden beschreiben müsse, das lehrt die Mathematik freilich nur durch synthetische Sätze; „aber daß, wenn ich weiß, durch solche Handlung allein könne die gedachte Wirkung geschehen, ich, wenn ich die Wirkung vollständig will, auch die Handlung wolle, die dazu erforderlich ist, ist ein analytischer Satz. Denn etwas als eine auf gewisse Art durch mich mögliche Wirkung, und mich, in Ansehung ihrer, auf dieselbe Art handelnd vorstellen, ist ganz einerlei.“ Oder um klar zu machen, daß durch Aufheben des Prädikats in einem identischen Urteile ein Widerspruch entstehe, benutzt er (Kritik d. r. V. (II 464) einen Triangel. Einen solchen setzen und doch die drei Winkel desselben aufheben, ist widersprechend, aber den Triangel samt seinen drei Winkeln aufheben, ist kein Widerspruch. Ebenda (S. 239) sucht er die Entstehung eines irrigen Urteils zu veranschaulichen, dadurch daß er den Irrtum bezeichnet als Diagonale zwischen zwei Kräften, die das Urteil nach zwei verschiedenen Richtungen bestimmen, die gleichsam einen Winkel einschließen; jene zusammengesetzte Wirkung, welche ein Zusammenfließen der

subjektiven Gründe des Urteils mit den objektiven herbeiführt, ist dann aufzulösen in die einfache des Verstandes und der Sinnlichkeit. Für sich allein genommen irrt weder Verstand noch Sinnlichkeit; denn die Sinne urteilen überhaupt nicht, und wenn der Verstand bloß seinen Gesetzen folgt, so stimmt das Urteil mit diesen notwendig überein. In den Prolegomenen (II 111) erläutert er den Satz, daß von zwei einander widersprechenden Sätzen nicht beide falsch sein können, außer wenn der Begriff, der beiden zu Grunde liegt, widersprechend ist, an den beiden gleichfalschen Sätzen: ein viereckiger Zirkel ist rund, und ein viereckiger Zirkel ist nicht rund. Das logische Merkmal der Unmöglichkeit eines Begriffs (viereckiger Zirkel) ist eben das, daß unter derselben Voraussetzung zwei widersprechende Sätze zugleich falsch sein würden. Der Unterschied zwischen primitiven und konstitutiven Merkmale der Dinge wird klar gemacht an den drei Winkeln eines Triangels und seinen drei Seiten. Die letzteren sind die Gründe zu jenen, die ersteren dagegen Folgen dieser. Der scheinbar paradoxe Satz, daß der Verstand der Natur ihre Gesetze vorschreibt, wird ebenda (S. 85) beleuchtet durch die Eigenschaften des Zirkels, „wodurch diese Figur so manche willkürliche Bestimmungen des Raumes in ihr sofort in einer allgemeinen Regel vereinigt.“ So teilen sich zwei im Kreise sich schneidende Sehnen so, daß das Rektangel aus den Stücken einer jeden Linie dem der anderen gleich ist. Dieses Verhältnis wird weiter ausgedehnt auf die Kegelschnitte und bis zu den Grundlehren der physischen Astronomie verfolgt, wo das Gesetz der im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Entfernungen wirkenden Attraktion in der Natur der Dinge zu liegen scheint, in Wahrheit aber nur der Verstand der Ursprung dieser allgemeinen Ordnung der Natur ist, indem er alle Erscheinungen unter seine eigenen Gesetze faßt und durch Erfahrung a priori zustande bringt. Daß es schlechterdings unmöglich ist, vom kategorischen Imperativ: ich soll mein Versprechen halten, den Beweis zu geben, wird deutlich gemacht (Rechtslehre 1797. (IX. 85) durch den Hinweis auf den Geometer, dem es eben so unmöglich ist durch Vernunftschlüsse zu beweisen, daß man, um ein Dreieck zu

machen, drei Linien nehmen müsse, deren zwei aber zusammen größer sein müssen als die dritte. Schließlich darf wohl auch die mehrfache Erwähnung Euclids beweisen, daß Kant oft über mathematische Dinge nachgedacht hat. Es sei hier nur jene Stelle gegen Ende der Prolegomenen (III 153) hervorgehoben, wo er die Rezension bespricht, welche die Kritik der reinen Vernunft in den Göttingischen gelehrten Anzeigen gefunden hatte: „Beim Anblick dieser Zeile sah ich bald, was für eine Rezension da herauskommen würde, ungefähr so, als wenn jemand, der von Geometrie nie etwas gehört oder gesehen hätte, einen Euclid fände, und ersucht würde, sein Urteil darüber zu fällen, nachdem er beim Durchblättern auf viel Figuren gestoßen, etwa sagte: „Das Buch ist eine systematische Anweisung zum Zeichnen, der Verfasser bedient sich einer besonderen Sprache, um dunkle, unverständliche Vorschriften zu geben, die am Ende doch nichts mehr ausrichten können, als was jeder durch ein gutes natürliches Augenmaß zustande bringen kann 2c."

Wie gerne sich Kant mit der Mathematik beschäftigt hat, und wie er ihren hohen Wert unter den übrigen Wissenschaften zu schätzen gewußt hat, zeigt sich überall, wo er auf diese Wissenschaft zu sprechen kommt. Es klingt fast wie ein Hymnus auf die Mathematik, wenn er in der Abhandlung de mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis 1770. (I 322) sagt: „Hinc Geometria principiis utitur non indubitatis solum ac discursivis, sed sub obtutum mentis cadentibus, et evidentia in demonstrationibus non solum in ipsa est maxima, sed et unica, quae datur in scientiis puris, omnisque evidentiae in aliis exemplar et medium . . . . Ceterum Geometria propositiones suas universales non demonstrat, obiectum cogitando per conceptum universalem, quod fit in rationalibus, sed illud oculis subiciendo per intuitum singularem, quod fit in sensitivis." So singt er auch ihr Lob (in dem Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes 1763) mit den Worten: „Die notwendigen Bestimmungen des Raumes verschaffen dem Meßkünstler ein nicht gemeines Vergnügen durch die Augenscheinlichkeit in der Ueberzeugung, durch die Genauigkeit in

der Ausführung, ingleichen durch den weiten Umfang der Anwendung, wogegen die gesamte menschliche Erkenntnis nichts aufzuweisen hat, was ihm gleichkäme, viel weniger es überträfe.“ (II 198.) Die Notwendigkeit und Anschaulichkeit ihrer Behauptungen erteilen nicht nur der Mathematik selbst einen so hohen Rang unter den Wissenschaften, sondern auch den Naturwissenschaften, die sich ihrer bedienen, verleiht sie allein einen dauernden Wert, ja diese enthalten nur so weit eigentliche Wissenschaft, als sie von Mathematik begleitet sind. (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft 1786. (V 309.) Sein Beweis für diese Behauptung ist kurz folgender: Eigentliche Wissenschaft gründet sich auf Erkenntnis a priori d. h. aus bloßer Möglichkeit. Diese kann aber nicht aus Begriffen allein erkannt werden, das gälte nur für die Möglichkeit des Gedankens; die Erkenntnis eines Naturdinges als eines Objekts bedarf vielmehr noch einer dem Begriffe korrespondierenden Anschauung a priori d. h. einer Konstruktion. Nun ist aber Vernunfterkenntnis durch Konstruktion Mathematik, also ist eigentliche Naturlehre über bestimmte Dinge nur vermittelst Mathematik möglich. Demgemäß spricht Kant der Chemie und der empirischen Psychologie den Rang eigentlicher Wissenschaften ab, denn die Prinzipien der ersteren sind bloß empirisch und einer Darstellung a priori in der Anschauung unzugänglich; und auf die Phänomene des inneren Sinns und ihre Gesetze ist Mathematik überhaupt nicht anwendbar, „man müßte denn allein das Gesetz der Stetigkeit in dem Abflusse der inneren Veränderungen desselben in Anschlag bringen wollen, welches aber eine Erweiterung der Erkenntnis sein würde, die sich zu der, welche die Mathematik der Körperlehre verschafft, ungefähr so verhalten würde, wie die Lehre von den Eigenschaften der geraden Linie zur ganzen Geometrie.“ Die erwähnten Eigenschaften der Mathematik stempeln sie zu einem „Organon“ anderer Wissenschaften, weil sie den Grund zur Erweiterung unserer Erkenntnis in Ansehung eines gewissen Vernunftgebrauchs enthält. Das leistet die Logik nicht, denn sie ist nur eine allgemeine Vernunftkunst, Erkenntnisse überhaupt der Form des Verstandes gemäß zu machen, sie kann daher nur ein Kanon für die

übrigen heißen (III 172). Auch in pädagogischer Beziehung verdient die Mathematik alle Beachtung, weil man beim Unterrichte Wissen und Können möglichst vereinigen soll. „Unter allen Wissenschaften scheint die Mathematik die einzige der Art zu sein, die diesen Endzweck am besten befriedigt." (IX 409.) Mit der Metaphysik hat die Mathematik das gemein, daß beide keine Hypothesen zulassen, die in andern Wissenschaften wohl nützlich, sogar unentbehrlich sein können, und Kant trägt auch seine Theorie vom Ursprunge des Weltgebäudes lieber als bloße Hypothese vor „als nach Art einer mathematischen Methode mit allem Gepränge, das diese mit sich führt" (VI 95.), um ihre Prüfung der Einsicht des Lesers zu überlassen, damit nicht jene Methode durch den Schein einer Erschleichung Unwissende zwar einnehme, Kenner aber unbefriedigt lasse. Diese Motivierung läßt jedoch vermuten, daß er sich hier seiner Sache doch noch nicht ganz gewiß war, denn die mathematische Methode stand bei ihm in so hohem Ansehen, daß er dieselbe, wenn sie nur durchführbar gewesen wäre, gewiß auch bei der Begründung seiner Theorie über die Entstehung des Weltgebäudes benutzt hätte. Freilich scheint eine Aeußerung in seiner Anthropologie (Anthropologie in pragmatischer Hinsicht 1798. (VII b 13) anzudeuten, daß er von der früheren Begeisterung für die apodiktische Gewißheit der Mathematik in späteren Jahren zurückgekommen ist und den Beifall, den ihre Lehren finden, zum Teil einer willkürlichen Uebereinkunft zuschrieb. Dort sagt er nämlich: „Man sage ja nicht, daß wenigstens die Mathematik privilegiert sei, aus eigener Machtvollkommenheit abzusprechen; denn wäre nicht die wahrgenommene durchgängige Uebereinstimmung des Meßkünstlers mit dem Urteile aller Andern, die sich diesem Fache mit Talent und Fleiß widmeten, vorhergegangen, so würde sie selbst der Besorgnis, irgendwo in Irrtum zu fallen, nicht entnommen sein."

Mann könnte diese Aeußerung als einen prophetischen Blick in die Neuzeit auffassen, wo in der That Gelehrte, deren Namen in der Geschichte der Mathematik den unseres Kant bei weitem überstrahlen, und „die sich diesem Fache mit Talent und Fleiß gewidmet haben", in Uneinigkeit mit dem „Meßkünstler" geraten sind.